

FEB 27 '51

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler
Redactor: R. Sänger

INHALT – CONTENTS – SOMMAIRE

USCH, G.: Elektronenleitung in Nichtmetallen	3
CKERET, J., DEGEN, M., und ROTT, N.: Untersuchungen an gepfeilten und ungepfeilten Flügeln bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten	32
AUMANN, E.: Über Scheinwiderstände mit vorgeschriebenem Verhalten des Phasenwinkels	43
RÜSSI, F.: Die numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung	53

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

IGGLI, P.: Die zu einem Koordinatenwert gehörigen Auswahlregeln der Röntgeninterferenzen in verschiedenen Raumsystemen	71
--	----

Varia – Miscellaneous – Divers

erichte über die Internationale Tagung für Kernphysik und Quantenelektrodynamik in Basel und Como, vom 5. bis 16. September 1949	74
--	----

uchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques	77
--	----

ZAMP

Vol. I

Fasc. 1

Pag. 1–80

15. 1. 50

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sänger, Gloriastraße 35, Zürich 6 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluß*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* in der Originalsprache eine kurze Zusammenfassung beigegeben werden, damit diese durch die Redaktion in eine andere der vier genannten Sprachen übersetzt werden kann. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Der Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratiscopien separata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in the original language for translation into one of the four languages by the editor. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction. Writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers* and *Brief Reports* receive 50 free copies of separate prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en langue originale qui sera traduit par la rédaction dans une des quatre langues prévues. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 28.-, Ausland Fr. 34.-, Einzelnummer Fr. 6.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 28.-, foreign Fr. 34.-, single copy Fr. 6.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 28.-, étranger Fr. 34.-, le numéro Fr. 6.-

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 150.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 80.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 45.-

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1950 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10 (Switzerland)

Printed in Switzerland

VORWORT — PREFACE — AVANT-PROPOS

Der Aufgabenkreis unserer neuen Zeitschrift ist durch ihren Namen umschrieben: Die «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik» (ZAMP) sucht die Lücke zwischen den der reinen Mathematik und der reinen Physik einerseits und den den konstruktiven Ingenieurwissenschaften andererseits gewidmeten Zeitschriften auszufüllen. Sie will der Veröffentlichung von grundlegenden Forschungsarbeiten dienen, die auf der Anwendung mathematischer oder physikalischer Untersuchungsmethoden und Überlegungen beruhen.

Neben Originalarbeiten aus diesem Gebiet sollen regelmäßig auch zusammenfassende Berichte erscheinen, die den jeweiligen Stand der Erkenntnisse auf einem bestimmten Teilgebiet darstellen und die damit Ausgangspunkte für die weitere Entwicklung bilden können.

Wichtige Forschungsergebnisse können zur Sicherung der Priorität auch in Form kurzer Mitteilungen kurzfristig veröffentlicht werden. Endlich sollen Notizen und Buchbesprechungen über die Ergebnisse wissenschaftlicher Tagungen und über literarische Neuerscheinungen orientieren.

Die neue Zeitschrift kann ihre Aufgabe nur dann mit Erfolg erfüllen, wenn sie sich auf das Interesse und die Mitarbeit der zuständigen Fachkreise stützen kann; die Herausgeber hoffen, daß ihr dies gelingen möge.

*

The mission of our new periodical is indicated by its name: "The Journal of Applied Mathematics and Physics" (ZAMP), and its aim is to bridge the gap existing between the periodicals devoted to pure mathematics and physics on the one hand, and those confined to the constructive engineering sciences on the other hand. It will function as a publication medium for papers on fundamental research based on the application of mathematical or physical methods and considerations.

Apart from original papers covering this field, regular survey articles will be published summarizing the latest advances made in particular fields and constituting possible starting-points for further development.

In order to ensure priority, important research results may be published at short notice as brief reports. Other notices and book reviews will inform the reader on the results of scientific congresses and recent literary publications.

The new journal can successfully attain its end only if it is backed by the interest and collaboration of those scientific circles for which it is primarily intended and the editors hope that the necessary support will be forthcoming.

*

Le but de la nouvelle revue est déjà suggéré par son titre. Le *Journal de Mathématiques et de Physique appliquées* (ZAMP) se propose de jeter un pont entre les revues de mathématiques et de physique pures d'une part et celles qui traitent des sciences appliquées de l'ingénieur, d'autre part. Elle entend servir à la publication de travaux de recherches fondamentaux se basant sur l'emploi de méthodes d'investigation relevant des mathématiques ou de la physique.

A côté de travaux originaux de ce genre paraîtront également des articles plus généraux rendant compte des résultats déjà obtenus dans un certain domaine de connaissances et pouvant servir de point de départ pour des recherches ultérieures.

D'importants résultats de recherches dont on voudrait s'assurer la priorité de publication pourront paraître à bref délai sous forme de communications brèves. Enfin, la revue contiendra des notes sur les réunions à but scientifique et les livres nouvellement parus.

La nouvelle revue n'arrivera à remplir la tâche qu'elle s'est assignée que si elle peut compter sur l'intérêt et la collaboration des milieux scientifiques et techniques compétents; les éditeurs espèrent que cela lui sera possible.

Redaktionskommission und Redaktor

Zürich, im November 1949

Elektronenleitung in Nichtmetallen

Zusammenfassender Bericht

Von GEORG BUSCH, ETH., Zürich

Inhaltsverzeichnis

I.

1. Ionen- und Elektronenleitung im festen Körper	4
2. Halbleitypen	5
2.1 Eigenhalbleiter	5
2.2 Überschuß- und Mangelleiter	8
2.3 Entartungerscheinungen	11
2.4 Wesen und Größe der Aktivierungsenergie. Natur der Störstellen.	12
2.41 Ionenkristalle	12
2.42 Valenzkristalle	15
2.43 Halbleiter mit ungefülltem 3d-Band	17
3. Elektrische Leitfähigkeit und galvanomagnetische Effekte	19
3.1 Theoretische Grundlagen	19
3.11 Elektrische Leitfähigkeit	19
3.12 Hall-Effekt	23
3.13 Magnetische Widerstandsänderung	24
3.2 Experimentelles	25
3.21 Untersuchungsmaterial	25
3.22 Meßmethoden	27
3.3 Ergebnisse	28
3.31 Verzeichnis halbleitender Substanzen	28
3.32 Spezielle Fälle	29
3.321 Zinkoxyd ZnO	29

II.¹⁾

3.322 Kupferoxydul Cu ₂ O	82
3.323 Siliziumkarbid SiC	85
3.324 Silizium Si	90
3.325 Oxyde mit Spinellstruktur	96
3.33 Meyer-Neldelsche Regel	97
3.34 Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätskonstanten und der Aktivierungsenergie	100
3.35 Einfluß eines allseitigen Druckes auf die elektrische Leitfähigkeit	101
4. Thermospannung Metall-Halbleiter	102
4.1 Formel für die differentiale Thermospannung	102
4.2 Experimentelle Ergebnisse	104
5. Schlußwort	107
Literaturverzeichnis	108

¹⁾ Erscheint in ZAMP I/2.

1. Ionen- und Elektronenleitung im festen Körper

Die elektrische Leitfähigkeit der Materie im festen Zustand beruht auf dem Transport von Ionen und Elektronen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes. Während *Ionenleitung* im wesentlichen nur in heteropolaren Kristallen und in Gläsern auftritt, ist *Elektronenleitung* grundsätzlich in jedem festen Körper möglich, unabhängig von der Art der chemischen Bindung. Die Elektronenleiter lassen sich nun ihrerseits wieder in zwei deutlich unterscheidbare Klassen einteilen, nämlich in *Metalle* und *Halbleiter*.

Metalle sind charakterisiert durch ihre hohen elektrischen Leitfähigkeiten, die etwa zwischen $5,9 \cdot 10^3$ und $6,7 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ liegen. Die metallische Leitfähigkeit steigt mit sinkender Temperatur an und springt bei einer Reihe von Metallen und Verbindungen mit Eintritt der *Supraleitung*¹⁾ in der Nähe des absoluten Nullpunktes auf Werte, die wahrscheinlich größer sind als $10^{20} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$. Während die Supraleitung nach unseren heutigen Kenntnissen ein eindeutiges Kriterium für den metallischen Zustand ist, darf aus der Größe der Leitfähigkeit und einem negativen *Temperaturkoeffizienten* innerhalb eines beschränkten Temperaturgebietes allein nicht ohne weiteres auf metallische Leitfähigkeit geschlossen werden. Verschiedene Elemente, wie Si, Ge, Te, die auf Grund derartiger Beobachtungen lange Zeit als Metalle angesehen wurden, haben sich in neuerer Zeit, vom Standpunkt der Elektrizitätsleitung aus betrachtet, als Halbleiter erwiesen.

Halbleiter, im heutigen Sinne des Wortes, sind Elektronenleiter, deren Leitfähigkeit am absoluten Nullpunkt verschwindet. Mit steigender Temperatur nimmt die elektrische Leitfähigkeit im allgemeinen zu; es können jedoch Temperaturbereiche existieren, in denen ihr Temperaturkoeffizient negativ ist. Es ist sogar zu erwarten, daß für jeden Halbleiter eine bestimmte kritische Temperatur existiert, oberhalb welcher der Temperaturkoeffizient, wie bei Metallen, negativ wird. Umgekehrt spricht ein positiver Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit noch nicht eindeutig für einen Halbleiter, denn die Leitfähigkeit fester Ionenleiter zeigt einen in großen Zügen analogen Temperaturgang. Überdies treten Ionen- und Elektronenleitung oft gleichzeitig nebeneinander auf. Die eindeutige Unterscheidung zwischen Halbleiter und Ionenleiter ist daher meistens viel schwieriger, als im allgemeinen angenommen wird, und erfordert mindestens eine genaue Messung der Überführungszahlen. Der vielumstrittene Fall des $\alpha\text{-Ag}_2\text{S}$ stellt ein sprechendes Beispiel für die Schwierigkeit einer derartigen Analyse des Leitungsmechanismus dar³⁾.

¹⁾ Siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung von E. JUSTI [5]²⁾.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf S. 108.

³⁾ Siehe z. B. B. GUDDEN [3].

Der nachfolgende Bericht befaßt sich zur Hauptsache mit der *elektrischen Leitfähigkeit* sowie mit *galvanomagnetischen* und *thermoelektrischen* Effekten in Halbleitern. Ionenleiter und Metalle bleiben außer Betracht; ebenso die für den Metall-Halbleiter-Kontakt charakteristischen *Gleichrichtereffekte* sowie auch Probleme der *Photoleitung* und *Photospannung*.

2. Halbleitypen

2.1 Eigenhalbleiter

Eine als reguläres Gitter kristallisierende Substanz enthalte im Volumen R (Grundgebiet) eine große Zahl N gleichartiger Atome bzw. Ionenpaare. Auf

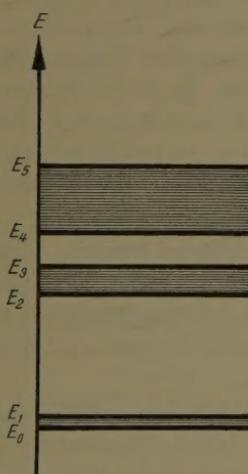


Fig. 1
Energiebänder im Kristallgitter.

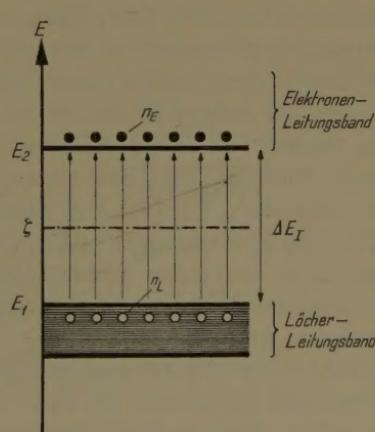


Fig. 2
Energieschema des Eigenhalbleiters.

Grund der Elektronentheorie des festen Körpers [1, 2, 7, 8, 9] ist bekannt, daß das Energiespektrum der Gesamtheit aller im Volumen R vorhandenen Elektronen eine diskontinuierliche Folge diskreter Energiezustände der folgenden Art darstellt (Fig. 1):

«Erlaubte» Energiebereiche endlicher Größe $E_0E_1, E_2E_3, E_4E_5, \dots$ (in Fig. 1 horizontal schraffiert) sind durch «verbotene» Bereiche E_1E_2, E_3E_4, \dots von einander getrennt. Jeder erlaubte Energiebereich (sog. Energieband) enthält genau N mögliche, d.h. durch zwei Elektronen entgegengesetzten Spins besetzbare Energieniveaus. In jedem Band sind demnach genau $2N$ Elektronen unter-

zubringen. Elemente mit gerader Elektronenzahl besitzen daher *vollständig besetzte Energiebänder*. Dagegen sind *unvollständig besetzte Energiebänder* charakteristisch für Elemente mit ungerader Elektronenzahl. Der *metallische Zustand* ist dadurch gekennzeichnet, daß das höchste von Elektronen beanspruchte Band *unvollständig besetzt* ist (Alkalimetalle) oder sich mit dem nächstfolgenden erlaubten Band teilweise *überlappt* (Erdalkalimetalle).

Für den *nichtmetallischen Zustand* ist es dagegen typisch, daß für die Temperatur $T = 0$ das höchste von Elektronen beanspruchte Band genau *vollständig* durch $2N$ Elektronen besetzt ist.

Durch Anlegen praktisch erreichbarer elektrischer Felder kann den Elektronen eines voll besetzten Bandes kein *Zusatzimpuls* erteilt und damit kein *Strom* erzeugt werden. Nichtmetalle sind demzufolge am absoluten Nullpunkt *Isolatoren*.

Für endliche Temperaturen ergeben sich jedoch neue Verhältnisse. Mit wachsender Temperatur steigt die Wahrscheinlichkeit, daß Elektronen das höchste vollbesetzte Band verlassen (Fig. 2) und erlaubte Zustände im nächsthöheren, *leeren* Band besetzen. Diese thermisch angeregten Elektronen sind im Gitter mehr oder weniger frei beweglich und liefern unter der Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes einen *Elektronenstrom*. Der Anzahl n_E Elektronen im *Leitungsband* entspricht eine gleich große Zahl n_L von unbesetzten Zuständen, sog. *Löchern*, im bisher vollbesetzten Band, die zu einem *Löcherstrom* Anlaß geben. Während die Elektronen infolge ihrer *negativen* Ladung zur Richtung des elektrischen Feldes *entgegengesetzt* beschleunigt werden, erfahren die Löcher Kräfte im Richtungssinn des Feldes, d.h. sie verhalten sich wie *positive* Ladungsträger. In beiden Bändern ist somit ein Ladungstransport möglich: Der am absoluten Nullpunkt vollständig nichtleitende Kristall wird bei höheren Temperaturen *leitend*.

Die Zahl N_E der Elektronen im Leitungsband läßt sich nach WILSON [129] folgendermaßen berechnen: Die Zahl der Energiestufen (Eigenwerte) im Energieintervall dE , die sog. *Eigenwertdichte* $D(E)$, beträgt in der Nähe des unteren Randes E_2 des Leitungsbandes

$$D_2(E) dE = \frac{R}{4\pi^2} \left(\frac{2m_2^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E - E_2)^{1/2} dE. \quad (1)$$

R = Volumen des Grundgebietes,

m_2^* = effektive Elektronenmasse im Leitungsband,

$\hbar = h/(2\pi) = 1,01 \cdot 10^{-27}$ erg·s (Plancksche Konstante).

Für die Umgebung des oberen Randes des vollbesetzten Bandes gilt

$$D_1(E) dE = \frac{R}{4\pi^2} \left(\frac{2m_1^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_1 - E)^{1/2} dE. \quad (2)$$

m_1^* = effektive Elektronenmasse im vollbesetzten Band.

Die effektiven Elektronenmassen m_1^* und m_2^* sind im allgemeinen mit der Ruhemasse m_0 des Elektrons nicht identisch. Sie tragen in summarischer Weise der Tatsache Rechnung, daß sich die Elektronen innerhalb des Kristallgitters nicht in einem konstanten, sondern in einem räumlich periodischen Potential mit der Periode des Kristallgitters bewegen.

Für die Anzahl Elektronen $N(E)$ mit Energien zwischen E und $E + dE$ gilt:

$$N(E) dE = 2 D(E) w(E) dE, \quad (3)$$

wobei $w(E)$ die Fermi-Diracsche Verteilungsfunktion bedeutet, d. h.

$$w(E) = \frac{1}{e^{(E-\zeta)/kT} + 1}. \quad (4)$$

ζ = Energieparameter, für $T = 0$ Grenzenergie der Fermi-Diracschen Verteilung,

k = Boltzmannsche Konstante,

T = absolute Temperatur.

Im stationären Fall muß die Gesamtzahl N_E der Elektronen im Leitungsband gleich der Zahl N_L der Löcher, d. h. der fehlenden Elektronen im fast vollbesetzten Band sein, d.h. nach (3):

$$N_E = N_L = 2 \int_{\text{Leitungsband}} D_2(E) w(E) dE = 2 \int_{\text{volles Band}} D_1(E) [1 - w(E)] dE. \quad (5)$$

Durch Einsetzen von (1), (2) und (4) und Weglassen gemeinsamer Faktoren folgt mit zweckmäßigen Integrationsgrenzen:

$$m_2^{*3/2} \int_{E_2}^{\infty} \frac{(E - E_2)^{1/2} dE}{e^{(E-\zeta)/kT} + 1} = m_1^{*3/2} \int_{-\infty}^{E_1} \frac{(E_1 - E)^{1/2} dE}{e^{-(E-\zeta)/kT} + 1}. \quad (6)$$

Nun liegt die «Fermi-Energie» ζ zwischen den beiden Bandrändern E_1 und E_2 (Fig. 2). Das linksstehende Integral in (6) erstreckt sich daher über Energien

$$E \geq E_2 > \zeta;$$

für das rechtsstehende gilt

$$E \leq E_1 < \zeta.$$

Für nicht zu kleine Breiten

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1 \quad (7)$$

des verbotenen Gebietes bzw. hinreichend tiefe Temperaturen darf daher im Nenner beider Integranden die Größe $+1$ neben der Exponentialfunktion vernachlässigt werden. Dies bedeutet, daß die Energiezustände des Leitungsbandes nur schwach besetzt sind. Die Konzentration der Leitungselektronen sowie

die Löcherkonzentration im vollen Band ist also sehr gering. Das Gas der Leitungselektronen ist demnach *nicht entartet* und wird durch die Maxwell-Boltzmannsche Statistik genügend genau beschrieben. Auf das Problem der Entartung wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Im nichtentarteten Fall vereinfacht sich (6) zu

$$m_2^{*3/2} \int_{E_2}^{\infty} (E - E_2)^{1/2} e^{-(E-\zeta)/kT} dE = m_1^{*3/2} \int_{-\infty}^{E_1} (E_1 - E)^{1/2} e^{(E-\zeta)/kT} dE$$

und liefert durch Auswertung für die Grenzenergie ζ den Ausdruck

$$\zeta = \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{kT}{2} \log \left(\frac{m_1^*}{m_2^*} \right)^{3/2}. \quad (8)$$

Mit diesem Wert von ζ folgt aus (1), (4), (5) und (7) mit $n = N/R$ für die Zahl der Elektronen n_E im Leitungsband bzw. die Zahl der Löcher n_L im fast vollen Band pro Kubikzentimeter:

$$n_E = n_L = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_2^* k T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{m_1^*}{m_2^*} \right)^{3/4} e^{-\Delta E_1/(2kT)}. \quad (9)$$

Die Zahl der Ladungsträger pro Kubikzentimeter steigt demnach mit der Temperatur sehr rasch an und hängt außer von den effektiven Elektronenmassen m_1^* und m_2^* wesentlich von der Größe ΔE_1 , der sog. *Aktivierungsenergie*, ab. Jede dieser Größen ist durch die Geometrie des Gitters sowie die Art der an seinem Aufbau beteiligten Atome bzw. Ionen grundsätzlich in eindeutiger Weise festgelegt und damit für jede vorgegebene Substanz eigentlich. Stoffe, welche auf Grund des beschriebenen Mechanismus leiten, bezeichnet man als *Eigenhalbleiter*. Da die Leitfähigkeit proportional zur Zahl der Ladungsträger ist und diese bei gegebenen Daten des Gitters nach (9) einzig von der Temperatur abhängt, müßte die Leitfähigkeit bei konstanter Temperatur eine für jeden Stoff charakteristische Materialkonstante sein. Dies steht jedoch im Widerspruch mit dem überwiegenden Teil aller bisherigen Erfahrungstatsachen. Die Leitfähigkeit hängt im Gegenteil in auffallender Weise von *Abweichungen vom stöchiometrischen Gleichgewicht* und von Art und Konzentration *gitterfremder Einlagerungen* ab.

2.2 Überschuß- und Mangleiter

Gitterbaufehler, d.h. Fehlstellen oder gitterfremde Einlagerungen, haben zur Folge, daß im Energieschema der Elektronen *zusätzliche* Energieniveaux auftreten. Niveaux in kleinem energetischem Abstand unterhalb des unteren Randes des Leitungsbandes, welche bei tiefen Temperaturen von Elektronen

besetzt sind, wirken als *Elektronenspender* (Donatoren). Durch thermische Anregung werden Elektronen in das Leitungsbandsystem abgegeben und geben dort Anlaß zu *Elektronenleitung* (Fig. 3). Umgekehrt wirken nahe oberhalb des oberen Randes des vollbesetzten Bandes und bei tiefen Temperaturen *unbesetzte Niveaux* als *Elektronenempfänger* (Akzeptoren). Bei höheren Temperaturen wird ein Teil der Empfängerniveaux durch Elektronen des vollen Bandes besetzt. Dies hat *Löcherleitung* im nunmehr unvollständig gefüllten Band zur Folge (Fig. 4). Halbleiter der erstgenannten Art (*n*-Typ) bezeichnet man als *Überschuß-*, die der zweiten Art (*p*-Typ) als *Mangelhalbleiter*; beide gemeinsam als *Störhalbleiter*.

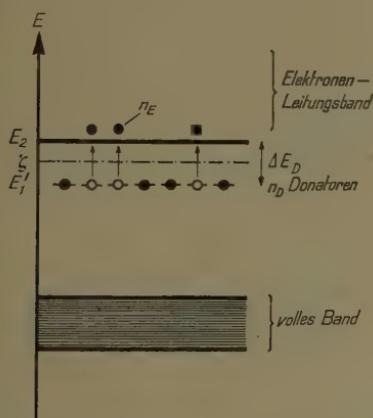


Fig. 3

Energieschema des Überschußhalbleiters.

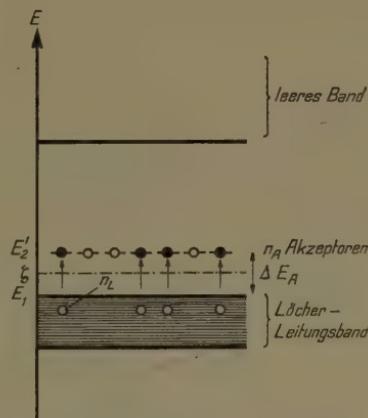


Fig. 4

Energieschema des Mangelhalbleiters.

Die Zahl der Elektronen n_E bzw. der Löcher n_L pro Kubikzentimeter berechnet sich für kleine Konzentrationen der Ladungsträger nach WILSON [129] ähnlich wie im Fall des Eigenhalbleiters.

Im Zustand des thermischen Gleichgewichtes muß die Zahl der Elektronen im Leitungsbandsystem gleich der Zahl der ionisierten Donatoren sein, d.h.

$$N_E = 2 \int_{E_s}^{\infty} D_2(E) w(E) dE = N_D [1 - w(E'_1)]. \quad (10)$$

N_D = Zahl der Donatoren im Grundgebiet,

E'_1 = Energieniveau der Elektronenspenderstellen.

Durch Einsetzen der Eigenwertdichte aus (1) sowie der Verteilungsfunktion und durch Einführung der Donatorenkonzentration $n_D = N_D/R$ folgt:

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_2^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{E_s}^{\infty} \frac{(E - E_s)^{1/2} dE}{e^{(E - \xi)/kT} + 1} = \frac{n_D}{e^{-(E'_1 - \xi)/kT} + 1}. \quad (11)$$

Beschränkt man sich wiederum auf genügend hohe Werte der Aktivierungsenergie $\Delta E_D = E_2 - E'_1$ (Fig. 3) bzw. tiefe Temperaturen, so vereinfacht sich (11) zu

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_2^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{E_2}^{\infty} (E - E_2)^{1/2} e^{-(E-\zeta)/kT} dE = n_D e^{(E'_1 - \zeta)/kT}. \quad (12)$$

Die Integration läßt sich leicht ausführen, und man gewinnt für ζ den Ausdruck

$$\zeta = \frac{E_2 + E'_1}{2} + kT \left[\log n_D^{1/2} - \log \left(\frac{2m_2^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/4} \right], \quad (13)$$

woraus durch Einsetzen auf der rechten Seite von (12) sofort folgt

$$\underline{n_E = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_2^* k T}{\pi\hbar^2} \right)^{3/4} n_D^{1/2} e^{-\Delta E_D/(2kT)}} \quad (14)$$

n_D = Zahl der Donatoren pro Kubikzentimeter,

m_2^* = effektive Elektronenmasse im Leitungsband,

ΔE_D = Aktivierungsenergie der Donatoren.

Der entsprechende Ausdruck für Mangelleiter lautet

$$\underline{n_L = \frac{1}{2} \left(\frac{2m_1^* k T}{\pi\hbar^2} \right)^{3/4} n_A^{1/2} e^{-\Delta E_A/(2kT)}} \quad (15)$$

n_A = Zahl der Akzeptoren pro Kubikzentimeter,

m_1^* = effektive Elektronenmasse im fast vollen Band,

ΔE_A = Aktivierungsenergie der Akzeptoren.

In beiden Fällen ist die Temperaturabhängigkeit der Konzentration der Ladungsträger gleich wie für den Eigenhalbleiter, mit Ausnahme der niedrigeren Potenz in der die Temperatur vor der Exponentialfunktion auftritt. Als neue Größen treten jedoch die Konzentrationen n_D und n_A der Spender- und Empfängerstellen auf. Damit wird die Theorie mindestens formal der experimentellen Tatsache gerecht, daß die Leitfähigkeit aller bekannten Halbleiter durch chemische Prozesse, wie Oxydation und Reduktion, oder Einlagerung von Fremdatomen (Verunreinigungen) in weiten Grenzen verändert werden kann.

Es ist klar, daß in jedem Halbleiter Spender- und Empfängerstellen gleichzeitig auftreten können. Es muß auch damit gerechnet werden, daß nebeneinander verschiedenartige Spender bzw. Empfänger mit unterschiedlichen Aktivierungsenergien existieren. Außerdem ist zu beachten, daß jeder Störhalbleiter bei hinreichend hohen, mit der Existenz des betreffenden Kristallgitters verträglichen Temperaturen Eigenleitung zeigen muß. Daraus geht hervor, daß man unter Umständen mit recht verwickelten Verhältnissen zu rechnen hat, deren Aufklärung sehr sorgfältige experimentelle Untersuchungen erfordert.

2.3 Entartungerscheinungen

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Ausdrücke für die Zahl der Ladungsträger als Funktion der Temperatur können nur richtig sein, solange ihre Konzentration wesentlich kleiner ist als die durch das *Entartungskriterium* gegebene kritische Dichte

$$n_{krit} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} T^{3/2} = 3,6 \cdot 10^{15} \cdot T^{3/2}. \quad (16)$$

Bei welchen Temperaturen das Elektronengas eines Halbleiters entartet, hängt davon ab, wie die Elektronenzahl n mit der Temperatur variiert. Nachdem im wesentlichen

$$n \sim e^{-AE/(2kT)}$$

ist, für tiefe Temperaturen also sehr rasch klein wird und für hohe Temperaturen einem konstanten Grenzwert zustrebt, ist Entartung weder für sehr hohe noch für sehr tiefe, sondern für mittlere Temperaturen zu erwarten. Für höhere Konzentrationen als n_{krit} sind die bei der Ableitung von (9), (14) und (15) gemachten Vernachlässigungen, die gleichbedeutend mit der Anwendung der Maxwell-Boltzmann-Statistik sind, nicht mehr zulässig. Andererseits erreichen die Elektronen- bzw. Löcherkonzentrationen auch in gutleitenden Halbleitern die hohen Werte in Metallen nicht, die eine *völlige* Entartung des Elektronengases zur Folge haben. Für Halbleiter wird daher gerade das Gebiet *schwacher* Entartung wichtig, welches von SHIFRIN [121] ausführlich diskutiert worden ist. Für einen Überschußhalbleiter ist somit Gleichung (11) streng zu lösen. Mit den Substitutionen

$$x = \frac{E - E_2}{kT}; \quad \mu = \frac{\zeta - E_2}{kT}; \quad \varepsilon = \frac{E_2 - E'_1}{kT} = \frac{AE_D}{kT}$$

folgt aus (11)

$$\frac{A^*}{e^{\varepsilon+\mu} + 1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\mu} + 1} = f_{1/2}(\mu) \quad . . . \quad (17)$$

mit

$$A^* = \pi^2 n_D \left(\frac{\hbar^2}{2m_2^* kT} \right)^{3/2}.$$

SHIFRIN hat gezeigt, daß der Parameter μ ein Maß für den Entartungsgrad darstellt. Die Bedingung $\mu = 0$ ist identisch mit dem Entartungskriterium (16) und bedeutet, daß die Grenzenergie ζ gerade mit dem unteren Rand E_2 des Leitungsbandes zusammenfällt. Solange $\mu \leq -2$ ist, d.h. solange die Grenzenergie um mehr als $2kT$ unterhalb des unteren Randes des Leitungsbandes liegt, darf das Elektronengas als nichtentartet betrachtet werden. Für $\mu \geq +1$ tritt dagegen bereits völlige Entartung ein; die Grenzenergie ζ liegt in diesem

Fall oberhalb des unteren Randes des Leitungsbandes. Aus $\mu = 0$ bzw. (16) kann leicht eine Beziehung zwischen den kritischen Werten der Aktivierungsenergie ΔE_D und der Donatorenkonzentration n_D als Funktion der Temperatur gefunden werden, für welche Entartung eintritt.

Die Lösung des Problems erfordert wiederum die Bestimmung von ζ bzw. μ aus Gleichung (17) als Funktion der Temperatur. Während SHIFRIN hierzu eine graphische Methode verwendet, haben BUSCH und LABHART [36] für $f_{1/2}(\mu)$ eine Entwicklung angegeben, welche die Funktion für alle Werte von $\mu \leq +1,5$ mit einer befriedigenden Genauigkeit von $\pm 3,5\%$ wiedergibt und eine analytische Behandlung der Gleichung (17) ermöglicht¹⁾. Nachdem ferner für $\mu \geq +1,5$ eine aus der Sommerfeldschen Theorie der Metallelektronik bekannte Entwicklung existiert, ist grundsätzlich eine Berechnung der Zahl der Leitungselektronen als Funktion der Temperatur für jeden Entartungsgrad möglich, wenn auch die erforderlichen Rechnungen etwas umständlich werden. Entartungerscheinungen spielen aber für gutleitende Halbleiter wie PbS, PbSe, SiC und bei den heute besonders interessierenden halbleitenden Elementen, wie Si, Ge, eine wesentliche Rolle [81, 106, 108].

2.4 Wesen und Größe der Aktivierungsenergie. Natur der Störstellen

Die Aktivierungsenergie ΔE_1 eines Eigenhalbleiters ist gleich dem energetischen Abstand des Leitungsbandes vom höchsten vollbesetzten Band (Fig. 2). Die theoretische Bestimmung dieser Größe erfordert eine genaue quantitative Berechnung der Eigenfunktionen und Eigenwerte der Elektronen für jedes Gitter. Solche Rechnungen sind z.B. für Diamant von KIMBALL [84] und HUND [76] und für das ebenfalls als Diamantgitter kristallisierende Silizium von MULLANEY [102] und HOLMES [75] durchgeführt worden. Leider sind diese Rechnungen gerade bei den für Halbleiter maßgebenden kleinen Energiedifferenzen der Bandränder bis jetzt zu wenig genau durchführbar, so daß man im allgemeinen auf eine experimentelle Bestimmung der Aktivierungsenergien angewiesen ist. Für Störhalbleiter ist dagegen eine Abschätzung der Aktivierungsenergie mit Hilfe geeigneter Modellvorstellungen über die Natur der Störstellen möglich.

2.41 Ionenkristalle

Nach den grundlegenden Arbeiten, hauptsächlich von WAGNER und SCHOTTKY²⁾, ist in einem heteropolaren Kristall, bestehend aus positiven

¹⁾ Wie PUTLEY [108] bemerkt, ist es sowohl SHIFRIN als auch BUSCH und LABHART entgangen, daß die Funktion $f_{1/2}(\mu)$ von McDougall und STONER [92] sehr genau berechnet und tabelliert worden ist. Durch Anschluß der Näherungsformel von BUSCH und LABHART an die exakten Werte reduzieren sich die Fehler auf weniger als $\pm 1,5\%$.

²⁾ Siehe z.B. die zusammenfassende Darstellung von W. Jost [4].

Metallionen M^+ und negativen Metalloidionen X^- mit folgenden Abweichungen vom Idealgitter, d.h. *Fehlordnungstypen*, zu rechnen, welche zu einer Elektronenleitung Anlaß geben können.

A. — Neutrale Metallatome (M) besetzen Zwischengitterplätze (Fig. 5). Da in den Zwischenräumen des Gitters im allgemeinen zu wenig Platz für ein neutrales Atom vorhanden ist, muß dieses als Ion M^+ aufgefaßt werden, in dessen Kraftfeld ein Elektron eingefangen ist.

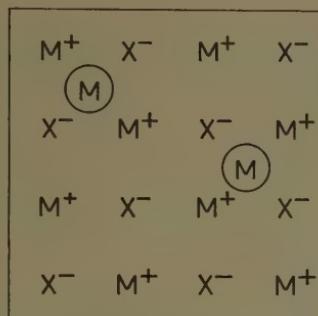


Fig. 5

Fehlordnung in einem Ionengitter mit Metallüberschub. Neutrale Metallatome auf Zwischengitterplätzen. Elektronenleiter.

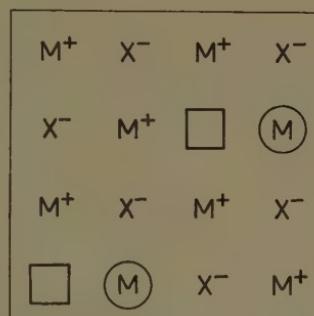


Fig. 6

Fehlordnung in einem Ionengitter mit Metallüberschub. Leerstellen im Anionenteilgitter. Elektronenleiter.

B. — Einzelne Plätze des X^- -Gitters sind unbesetzt (Fig. 6). Zur Erhaltung der Ladung muß für jedes fehlende X^- -Ion ein Elektron eingelagert werden, welches, chemisch betrachtet, irgendeines der benachbarten M^+ -Ionen in ein neutrales Atom (M) verwandelt. Da sich das zusätzliche Elektron jedoch mit gleicher Wahrscheinlichkeit an alle nächstbenachbarten M^+ -Ionen anlagert, wird die Leerstelle \square (fehlende negative Ladung) zweckmäßiger als positive Ladung aufgefaßt, in deren Kraftfeld sich das Elektron bewegt.

In beiden Fällen besteht im Gitter ein *Metallüberschub*, wie er chemisch durch eine *Reduktion* oder Erhitzen eines Kristalls im Dampf des am Gitter beteiligten Metalls erzeugt werden kann.

Nach MOTT [6] können Störstellen der beschriebenen Art *unabhängig* von der Art des eingelagerten bzw. fehlenden Ions wie ein Wasserstoffatom behandelt werden, dessen Elektron sich in einem Coulombschen Potential

$$V(r) = -\frac{e}{r^2} \cdot \frac{1}{k_{eff}} \quad (18)$$

bewegt. k_{eff} ist eine *effektive* Dielektrizitätskonstante, die von der Polarisier-

barkeit der Umgebung der Störstellen abhängt und deren Wert zwischen der statischen und der optischen Dielektrizitätskonstante des Kristalls liegt. Der Bahnradius eines solchen Elektrons ist infolge des abgeschwächten Potentials bedeutend größer als im Wasserstoffatom und kann mehrere Atomabstände betragen. Für die Energiezustände ergibt sich daher mit (18) ein Ausdruck ähnlich dem für das Wasserstoffatom

$$E_n = -\frac{e^4 m^*}{2 \hbar^2 n^2} \cdot \frac{1}{k_{eff}^2} \quad (19)$$

mit der Quantenzahl $n = 1, 2, 3, \dots$.

Die *Ionisierungsenergie* E_i einer Störstelle wird daher um den Faktor $1/k_{eff}^2$ kleiner als für das Wasserstoffatom, d.h.

$$E_{iE} = \frac{e^4 m_E^*}{2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{k_{eff}^2} = \frac{13,53}{k_{eff}^2} \cdot \frac{m_E^*}{m_0} \text{ eV.} \quad (20)$$

m_E^* = effektive Masse des Elektrons,

m_0 = Ruhemasse des Elektrons.

Nun ist aber E_{iE} gleichbedeutend mit der Arbeit, die nötig ist, um das von der Störstelle eingefangene Elektron abzulösen, d.h. ins Leitungsband zu heben. Der Grundzustand des Störatoms liegt also um den Betrag E_{iE} unterhalb des unteren Randes des Leitungsbandes, d.h. E_{iE} ist identisch mit der *Aktivierungsenergie* ΔE_D eines Überschußleiters (Fig. 3). Ihr Wert läßt sich somit nach (20) abschätzen, und es zeigt sich, daß die Aktivierungsenergien um so kleiner zu erwarten sind, je stärker polarisierbar das Kristallgitter ist.

Halbleiter mit Störstellen der Typen A und B sind *Elektronenleiter*, denn die Störstellen wirken als *Donatoren*. Ihre Konzentration erhöht sich nach Maßgabe des Metallüberschusses, d.h. durch chemische Reduktion. Überschuß- und Reduktionshalbleiter sind daher wesensgleich. Einer der typischen und am besten untersuchten Vertreter dieser Kategorie ist das ZnO. Weitere Beispiele sind in Abschnitt 3.3 angegeben.

C. – Entsprechend dem Typus A sind überschüssige Metalloidatome X auf Zwischengitterplätzen vorstellbar. Es scheint jedoch, daß diese Art Fehlordnung infolge der großen Ionenradien der Metalloide nicht realisiert ist.

D. – Einzelne Plätze des M^+ -Gitters sind unbesetzt (Fig. 7). Wegen der Erhaltung der elektrischen Gesamtladung des Kristallgitters muß mit jedem fehlenden Metallion auch ein Elektron aus dem Gitter entfernt werden. Dieses Elektron kann von irgendeinem der Fehlstelle benachbarten X^- -Ion geliefert werden, welches dadurch in ein neutrales Atom (X) übergeht. Ebensogut kann aber auch ein M^+ -Ion unter Übergang in ein M^{++} -Ion ein Elektron abgeben. Welcher der beiden Fälle realisiert ist, hängt davon ab, ob das höchste voll

besetzte Band von Elektronen der X^- -Ionen oder der M^+ -Ionen beansprucht wird. Das fehlende Elektron verhält sich wie ein positiv geladenes «Loch», welches sich analog zum Falle B im Potentialfeld der als *negative* Ladung wirkenden Leerstelle \square (fehlende positive Ladung) bewegt. Die Mott'sche Überlegung läßt sich daher auch auf dieses, ebenfalls wasserstoffähnliche System anwenden, indem man lediglich das Vorzeichen der Ladungen vertauscht. Um eine derartige Fehlstelle zu ionisieren, d.h. das Loch abzutrennen und für den Ladungstransport frei zu machen, ist bis auf den Unterschied in den effektiven Massen m^* derselbe Energiebetrag E_{jL} nötig, wie er in (20) angegeben ist. Nun ist aber die Abtrennung eines positiv geladenen Loches physikalisch dasselbe, wie die Anlagerung eines Elektrons. Um daher im höchsten vollbesetzten Band ein frei bewegliches Loch zu erzeugen, muß ein Elektron des vollen Bandes auf die um E_{jL} höhere Energie gebracht werden. Die Energieniveaux der Elektronenempfängerstellen (Akzeptoren) liegen somit um den Betrag

$$E_{jL} = \frac{13,53}{\hbar_{eff}^2} \cdot \frac{m_L^*}{m_0} \text{ eV} \quad (21)$$

oberhalb des oberen Randes des vollen Bandes (Fig. 4). m_L^* bedeutet die effektive Masse eines Loches. E_{jL} ist daher gleich der Aktivierungsenergie ΔE_A eines Mangelleiters.

In den beiden Fällen C und D herrscht im Gitter *Metallmangel*.

Die Konzentration der Akzeptoren wächst mit zunehmendem Metallmangel, d.h. durch Oxydation. Einer der am besten untersuchten Mangelleiter ist das Cu_2O . — Weitere Beispiele siehe unter Abschnitt 3.3.

Von einigen Verbindungen ist bekannt, daß sie sowohl als Überschuß- wie auch als Mangelhalbleiter in Erscheinung treten können. Untersuchungen von BAUER [21], ECKART und RAITHEL [48], EISENMANN [50], HINTENBERGER [70] und MORTON [101] an PbS und PbSe sowie von MEYER und NELDEL [96] am UO_2 haben gezeigt, daß in diesen Substanzen durch einen Überschuß an Metall Elektronen-, durch einen Überschuß an Metalloid dagegen Löcherleitung auftritt. Solche Halbleiter werden als *amphotter* bezeichnet.

2.42 Valenzkristalle

Es ist klar, daß in einem aus neutralen Atomen aufgebauten Gitter, wie Diamant, Si, Ge, SiC, mit vollbesetzten Energiebändern ein anderer Mechanismus

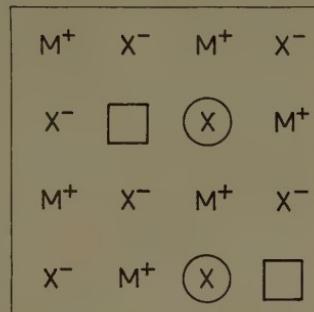


Fig. 7

Fehlordnung in einem Ionengitter mit Metallmangel. Leerstellen im Kationenteilgitter. Löcherleiter.

mus für die Elektronenleitung verantwortlich sein muß als für Ionenkristalle. Auf Grund umfangreicher Forschungsarbeiten zahlreicher amerikanischer Forscher¹⁾ ergibt sich folgendes Bild:

Silizium und Germanium sind Elemente der IV. Gruppe des periodischen Systems. Es hat sich nun gezeigt, daß Einlagerungen in kleinen Konzentrationen von dreiwertigen Elementen, wie B oder Al, im allgemeinen Mangelleitung, Zusätze von fünfwertigen Elementen, wie P, Sb, As, dagegen im allgemeinen Überschußleitung erzeugen. Die dabei auftretende Fehlordnung soll nach Angaben von PEARSON und BARDEEN [106] Substitutionscharakter haben, d.h. daß reguläre Plätze des Si-Gitters durch Fremdatome, z.B. P oder B, besetzt werden (Fig. 8 und 9).

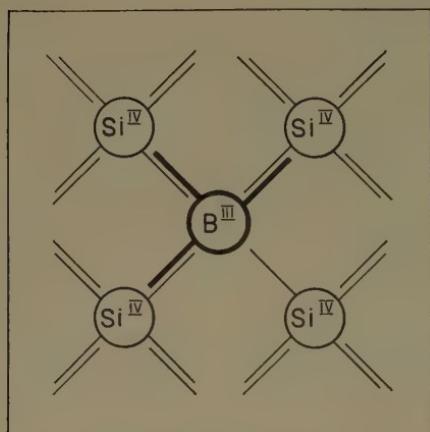


Fig. 8

Fehlordnung in einem Valenzgitter.
Dreiwertige Boratome auf regulären
Gitterplätzen. Löcherleiter.

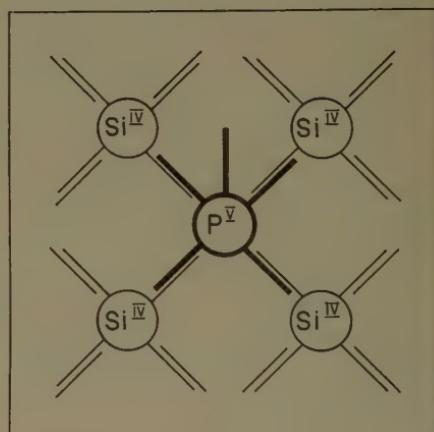


Fig. 9

Fehlordnung in einem Valenzgitter.
Fünfwertige Phosphoratome auf regulären
Gitterplätzen. Elektronenleiter.

Im idealen Si-Gitter (Diamanttyp) ist jedes Si-Atom tetraedrisch von 4 Si-Atomen umgeben. Wird nun ein Si-Atom durch ein fünfwertiges P-Atom ersetzt, so wird eines der 5 Valenzelektronen nicht für die Bindung beansprucht. Es wird sich also ähnlich wie ein Elektron verhalten, das von einer Fehlstelle in einen Ionenkristall eingefangen wurde, d.h. sich auf einer wasserstoffähnlichen Bahn um das eingelagerte P-Atom bewegen. Die quantitativen Betrachtungen sind daher ganz ähnlich wie für Ionengitter und zeigen, daß in diesem Fall ein Überschußleiter entsteht.

Ein eingelagertes dreiwertiges B-Atom hat dagegen ein Elektron weniger, als erforderlich ist, um die Valenzbindungen abzusättigen, und hat, wie leicht

¹⁾ Vgl. etwa H. C. TORREY und C. A. WHITMER [10].

einzusehen ist, Mangelleitung zur Folge. Auf Grund der beschriebenen Vorstellungen ist zu erwarten, daß Halbleiter mit homöopolarer Bindung grundsätzlich *amphotere* Halbleiter sind. Tatsächlich ist für Si, Ge und SiC sowohl Überschuß- wie auch Mangelleitung nachgewiesen worden.

Ein Umstand, der zweifellos eine Vertiefung dieser sehr erfolgreichen Vorstellungen erfordert, liegt darin, daß auch Einlagerungen von Sn, das ebenfalls der IV. Gruppe des periodischen Systems angehört, in ähnlicher Weise Störhalbleiter erzeugen.

2.43 Halbleiter mit ungefülltem 3 d-Band¹⁾

Eine gewisse Sonderstellung nehmen die Verbindungen der Elemente Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co und Ni ein. Bei diesen Elementen ist die 3 d-Elektronenschale nicht vollständig besetzt, während die 4 s-Schale ganz oder wenigstens teilweise aufgefüllt ist.

Substanzen wie z.B. MnO, CoO, NiO, Fe_2O_3 usw. weisen daher unvollständig gefüllte 3 d-Bänder auf.

Auf Grund der Bändertheorie der elektrischen Leitung sollte man bei diesen Stoffen metallische Leitfähigkeit erwarten. In Wirklichkeit liegt aber ihre Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur in der Größenordnung von 10^{-7} bis $10^{-8} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ und der Temperaturverlauf der Leitfähigkeit entspricht dem eines typischen Halbleiters.

Auf diesen Widerspruch haben DE BOER und VERWEY [44] hingewiesen. Ihre Erklärung ist folgende: Bei diesen Verbindungen kann die Bändertheorie nicht angewendet werden, weil die Eigenfunktionen der 3 d-Elektronen am Ort eines Nachbaratoms oder -ions im Gitter praktisch verschwinden. Mit anderen Worten: Die 3 d-Elektronen gehören zu bestimmten Atomen oder Ionen und sind keineswegs im Gitter frei beweglich, wie dies in der Metallelektronik angenommen wird. Zwischen den einzelnen Gitterplätzen befinden sich demnach Potentialwälle.

Der Grund für dieses Verhalten der 3 d-Elektronen liegt darin, daß sie nicht am Mechanismus der chemischen Bindung beteiligt sind. Das 3 d-Band liegt bei einem zweifach positiv geladenen Ion energetisch tief (3. Ionisierungsspannung) und ist infolge der geringen Wechselwirkung zwischen den 3 d-Elektronen benachbarter Atome schmal. Bei dieser Sachlage ist der Mechanismus der Elektronenleitung in Verbindungen mit ungefülltem 3 d-Band sehr ähnlich zu behandeln wie die Elektrizitätsleitung bei Ionenleitern.

Die 3 d-Elektronen können infolge ihrer thermischen Anregung und infolge des Tunneleffektes in benachbarte, äquivalente Gitterplätze gelangen. Wenn die Nachbarschaft normal besetzt ist, werden sie sofort wieder in den alten Platz

¹⁾ Die Abfassung der Abschnitte 2.43 und 3.325 verdanke ich Herrn Dr. H. LABHART am Institut für technische Physik an der ETH.

zurückfallen. Sitzt aber am Nachbarplatz aus irgendeinem Grund ein Ion des gleichen Elementes, das ein Elektron weniger hat, so wird dort die Aufenthaltsdauer so lang, daß in dieser Zeit ein Elektron aus einem dritten Gitterplatz an die verlassene Stelle springt. Wird bei diesen Platzwechselvorgängen infolge eines angelegten Feldes eine Richtung bevorzugt, so resultiert ein Ladungstransport.

Für diesen Leitungsmechanismus ist nötig, daß an äquivalenten Gitterplätzen Ionen des gleichen Elementes mit verschiedener Ladung sitzen. Dies kann aus verschiedenen Gründen der Fall sein.

Erstens können Abweichungen von der streng stöchiometrischen Zusammensetzung der Stoffe dazu Anlaß geben. Denken wir uns z.B. NiO mit einem geringen Überschuß von Sauerstoff. Nach Untersuchungen von DE BOER und VERWEY [44] entstehen im Gitter in diesem Fall Fehlstellen von Ni^{++} -Ionen. In der Nachbarschaft einer solchen Fehlstelle verlieren zur Aufrechterhaltung der Ladungsbilanz zwei Ni^{++} -Ionen je ein Elektron. Da die entstandenen Ni^{++} -Ionen, bei denen die Lage des 3 d -Bandes durch die Nähe der Störstelle allerdings etwas beeinflußt ist, an äquivalenten Gitterplätzen sitzen wie die Ni^{+++} -Ionen, ist die Bedingung für den obenerwähnten Leitungsmechanismus erfüllt.

Zweitens gibt es Kristallgitter, in denen an äquivalenten Gitterplätzen verschieden geladene Ionen des gleichen Elementes sitzen können. Solche Verhältnisse liegen beim *Spinellgitter* vor. In diesem Gitter kristallisieren viele zu der hier besprochenen Gruppe gehörenden Verbindungen, wie z.B. Fe_3O_4 , FeOCr_2O_3 , MnOFe_2O_3 usw.

Das Spinellgitter besteht aus einer im wesentlichen kubisch dichtesten Packung von Sauerstoffionen (Fig. 10). Greift man eine kubische Elementarzelle heraus, die 32 Sauerstoffionen enthält, so findet man zwischen den Sauerstoffionen 32 Hohlräume, die oktaedrisch von O^- umgeben sind, und 64 Hohlräume, die tetraedrisch von O^- umgeben sind. Von diesen Hohlräumen sind solche 16 oktaedrisch umgebene und 8 tetraedrisch umgebene von den zwei- und dreiwertigen Metallionen besetzt, daß die kubisch-holoedrische Symmetrie erhalten bleibt.

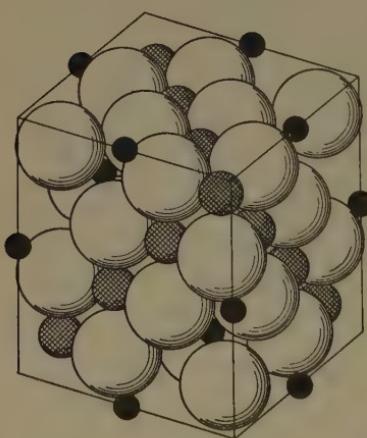


Fig. 10

Elementarzelle des Spinellgitters.
Große Kugeln - Sauerstoffionen.
Kleine schwarze Kugeln - Tetraederplätze.
Schraffierte Plätze - Oktaederplätze.
(Nach VERWEY und HEILMANN.)

Bei vielen Substanzen sitzen alle dreiwertigen Ionen an den Oktaederplätzen und alle zweiwertigen an den Tetraederplätzen. Da in diesem Falle

äquivalente Gitterplätze lauter gleichgeladene Ionen enthalten, gibt ein solches Gitter zu keiner Leitfähigkeit Anlaß.

BARTH und POSNJAK [19] haben jedoch gezeigt, daß bei zahlreichen im Spinellgitter kristallisierenden Substanzen die 8 Tetraederplätze von dreiwertigen Ionen eingenommen werden, so daß die 16 Oktaederplätze von gleich vielen zwei- und dreiwertigen Ionen besetzt sind (inverses Spinellgitter). Auf diese Tatsache bauen VERWEY, HAAYMAN und ROMEIJN [124] ihre Theorie über den elektrischen Leitmechanismus in Oxyden mit Spinellstruktur. Wenn nämlich die zwei- und dreiwertigen Ionen an den Oktaederplätzen zum gleichen Element gehören und statistisch verteilt sind, wird durch den Übergang eines Elektrons von einem zweiwertigen zu einem dreiwertigen Ion der Zustand des Gitters nicht geändert und im Mittel keine Energie aufgenommen. Beim Anlegen eines Feldes wird dabei ein Strom fließen. Weil Fe_3O_4 ein solches inverses Spinellgitter besitzt, erklärt sich somit das hohe elektrische Leitvermögen dieser Verbindung.

Im Fe_3O_4 lassen sich leicht die Fe^{++} -Ionen durch andere zweiwertige Ionen, wie Ni^{++} , Zn^{++} usw., ersetzen. In einem solchen Kristall findet man statistisch über die Oktaederplätze verteilt z.B. Ni^{++} - und Fe^{+++} -Ionen. Im allgemeinen ist dabei der Übergang eines Elektrons von Ni^{++} zu Fe^{+++} mit Energieaufwand verknüpft¹⁾ und daher weniger wahrscheinlich. Damit sinkt auch das elektrische Leitvermögen, und bei großen Energiedifferenzen wird der Stoff praktisch zum Isolator.

3. Elektrische Leitfähigkeit und galvanomagnetische Effekte

3.1 Theoretische Grundlagen

3.11 Elektrische Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit eines Halbleiters, in welchem gleichzeitig Elektronen- und Löcherleitung wirksam sind, läßt sich durch einen Ausdruck folgender Art darstellen:

$$\sigma = e n_E b_E + e n_L b_L. \quad (22)$$

Darin bedeuten n_E und n_L die durch (9) bzw. (10) und (11) gegebenen Elektronen- bzw. Löcherkonzentrationen; b_E und b_L sind die *Beweglichkeiten* der entsprechenden Ladungsträger. Die Beweglichkeit ist ihre mittlere, durch die Feldstärkeeinheit erzeugte Translationsgeschwindigkeit. Im Falle eines nichtentarteten Elektronengases ergibt sich für die Beweglichkeit auf Grund der

¹⁾ Wenn bei diesem Vorgang Energie gewonnen würde, übernahm Ni die Rolle des dreiwertigen und Fe die Rolle des zweiwertigen Ions.

klassischen Theorie von H. A. LORENTZ

$$\bar{b}_{E,L} = \frac{4}{3} \cdot \frac{e l_{E,L}}{(2 \pi m_{E,L}^* k T)^{3/2}} . \quad (23)$$

Darin bedeuten $l_{E,L}$ die *mittlere freie Weglänge* und $m_{E,L}^*$ die *effektive Masse* der Elektronen bzw. der Löcher.

Die Hauptschwierigkeit für eine abgeschlossene Theorie der Leitfähigkeit in Halbleitern liegt nun gerade in der Berechnung konkreter Werte für die freien Weglängen. Die Diskussion ihrer Abhängigkeit von der Temperatur ist dagegen in den meisten Fällen einfacher. Die freie Weglänge eines Elektrons ist umgekehrt proportional zur Wahrscheinlichkeit einer Streuung durch das Kristallgitter. Maßgebend für die Streuwahrscheinlichkeit sind die *Abweichungen* von der strengen Periodizität des idealen Gitters. Diese Abweichungen werden einerseits durch die *Temperaturbewegung* der Atome bzw. Ionen des Gitters, andererseits durch *Störungen* des Gitters durch Fehlstellen und Einlagerungen hervorgerufen. Die freie Weglänge l setzt sich also, ähnlich wie bei Legierungen, aus zwei Bestandteilen zusammen, und zwar gilt im einfachsten Fall, d.h. unter der Annahme der nicht unbeschränkt gültigen Additivität:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_g} + \frac{1}{l_s} . \quad (24)$$

Dabei ist l_g durch die thermisch angeregten Gitterschwingungen, l_s dagegen durch die Gitterbaufehler, namentlich durch Einlagerungen gitterfremder Atome (Verunreinigungen) bedingt.

Die Temperaturabhängigkeit des Gitteranteils lässt sich auf Grund einer elementaren Betrachtung verstehen. Die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines Elektrons infolge der Temperaturbewegung der Gitterpartikel ist proportional zum Streuquerschnitt, d.h. proportional zum Quadrat ihrer Amplitude, und damit für hinreichend hohe Temperaturen proportional zur absoluten Temperatur T . Die mittlere freie Weglänge l_g ist umgekehrt proportional zur Streuwahrscheinlichkeit und steht daher im reziproken Verhältnis zur Temperatur; d.h. es gilt im wesentlichen

$$l_g \sim \frac{1}{T} . \quad (25)$$

WILSON [129] und BRONSTEIN [31] haben das Problem quantentheoretisch behandelt. In Anlehnung an die Theorie von BLOCH [23] untersuchten sie die Wechselwirkung der Halbleiterelektronen mit den Schallquanten des Gitters. Der Unterschied gegenüber dem Metallproblem besteht darin, daß die Elektronen als nichtentartetes Gas, d.h. als Teilchen mit thermischen Geschwindigkeiten, behandelt werden. Es ergibt sich nicht nur für hohe, sondern für alle

praktisch bedeutsamen Temperaturen, d.h. etwa $T > 1^\circ \text{K}$, dieselbe Abhängigkeit von T wie in (25).

Eine Verfeinerung der Theorie der freien Weglänge von Elektronen in *Ionenkristallen* wurde von FRÖHLICH und MOTT [57, 58] gegeben, wobei der Polarität des Gitters Rechnung getragen wird. Maßgebend für die Streuung ist zur Hauptsache der optische Zweig der Gitterschwingungen. Diese Autoren finden für Leitungselektronen mit Maxwell-Boltzmann-Statistik für Temperaturen unterhalb der charakteristischen Temperatur Θ des Gitters, d.h. für $T < \Theta$:

$$l_g = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\epsilon - \epsilon_0 + 1}{\epsilon - \epsilon_0} \alpha_0 \left(\frac{T}{\Theta} \right)^{1/2} (e^{\Theta/T} - 1). \quad (26)$$

Die Konstanten bedeuten:

ϵ bzw. ϵ_0 = statische bzw. optische Dielektrizitätskonstante,
 $\alpha_0 = \hbar^2/m^* e^2$; m^* = effektive Elektronenmasse, e = Elektronenladung.

Eine entsprechende Theorie für *Valenzkristalle* stammt von SEITZ [120]. Infolge des unpolaren Charakters der Valenzbindung tritt weder im akustischen noch im optischen Zweig der Gitterschwingungen eine elektrische Polarisierung auf. Das Modell entspricht also eher wieder dem von WILSON und BRONSTEIN benützten, und es ist daher zum vornherein ein Resultat zu erwarten, welches jenen Ergebnissen nahekommt. Tatsächlich findet SEITZ auf Grund seiner strengerer Theorie wiederum die Temperaturabhängigkeit (25), nämlich:

$$l_g = \frac{9 \pi}{4} \cdot \frac{\hbar^4 c^2 n_0 M}{C^2 k m^{*2}} \cdot \frac{1}{T} \quad (27)$$

mit folgender Bedeutung der Konstanten:

c = Schallgeschwindigkeit,
 n_0 = Zahl der Atome pro Kubikzentimeter,
 M = Masse eines Atoms,
 k = Boltzmannsche Konstante.

C ist eine Konstante, welche ungefähr proportional zur charakteristischen Temperatur des Gitters ist und ein Maß für die Wechselwirkung zwischen Gitter und Elektronen darstellt. Leider ist gerade diese Größe sehr unsicher bekannt und kann nur roh abgeschätzt werden. In der Seitzschen Theorie wird die Wechselwirkung von Elektronen mit Energien von der Größenordnung kT mit den akustischen Gitterschwingungen allein berücksichtigt, da die optischen Schwingungen infolge der hohen charakteristischen Temperaturen der meisten Valenzkristalle bei den praktisch in Frage kommenden Temperaturen noch kaum angeregt sind.

Der Einfluß von Gitterbaufehlern auf die freie Weglänge bzw. die Beweglichkeit b_s ist von CONWELL und WEISSKOPF [42] untersucht worden, unter der

Annahme einer elastischen Streuung von Elektronen mit thermischen Geschwindigkeiten an statistisch im Gitter verteilten *Fremdionen*. Das Ergebnis lautet¹⁾

$$\frac{1}{b_s} = \frac{n_s \pi^{3/2} e^3 m^{1/2}}{2^{7/2} \epsilon^2 (k T)^{3/2}} \log(1 + x^2), \quad (28)$$

wo $x = (b \epsilon d k T)/e^2$ und die übrigen Konstanten die folgende Bedeutung haben:

n_s = Konzentration der Fremdionen,

ϵ = Dielektrizitätskonstante des Kristalls,

$2 d$ = mittlerer Abstand zwischen zwei benachbarten Fremdionen.

Für *nichtentartete* Überschuß- und Mangelleiter mit statistisch verteilten Fremdionen ergibt sich das folgende auf Grund theoretischer Betrachtungen gewonnene Bild: Während der Gitteranteil l_g nach (26) bzw. (27) mit steigender Temperatur abnimmt, ist für den Störungsanteil l_s nach (28) eine Zunahme mit steigender Temperatur zu erwarten. Die wesentlichen Züge der Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit lassen sich somit für einen *Valenzkristall* mit eingelagerten Fremdionen angeben. Mit (23) und (28) ergibt sich unter Annahme der Additivität beider Anteile nach (24)

$$\frac{1}{b} = \beta_g T^{+3/2} + \beta_s T^{-3/2}. \quad (29)$$

Der erste Term stellt den Gitter-, der zweite den Störungsanteil dar.

Für *Ionenkristalle* ist entsprechend (26) eine andersartige Temperaturabhängigkeit zu erwarten. Ein Vergleich mit der Erfahrung folgt in Abschnitt 3.3.

Auf Grund der vorangehenden Zusammenstellung ist es leicht, einzusehen, daß sich einfache und übersichtliche Verhältnisse nur unter speziellen Voraussetzungen ergeben können. Beschränkt man sich auf Valenzkristalle und das Gebiet hinreichend hoher Temperaturen, so läßt sich die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit in einfacher Weise darstellen. In diesem Falle tritt die Streuung der Leitungselektronen durch Fremdionen hinter der Gitterstreuung zurück, d.h. in (29) ist nur der erste Term maßgebend. Wählt man anderseits die Temperatur tief genug, so daß keine merkliche Eigenleitfähigkeit angeregt wird, so ergibt sich für die Leitfähigkeit eines reinen *Überschußhalbleiters* aus (22) mit $n_L = 0$, (29) und (14) eine Gesetzmäßigkeit von der Form

$$\sigma = a_D T^{-3/4} e^{-AE_D/(2kT)}, \quad (30)$$

$$a_D = \frac{e}{2\beta_g} \left(\frac{2m_s^* k}{\pi \hbar^2} \right)^{3/4} n_D^{1/2}. \quad (30a)$$

1) Vgl. die korrigierte Formel bei G. L. PEARSON und J. BARDEEN [106].

In diesem Ausdruck sind alle temperaturunabhängigen Größen in die Konstante a_D zusammengefaßt. Dies ist die früher meistens angegebene Formel für die Leitfähigkeit eines Halbleiters, wie sie aus den grundlegenden Arbeiten von WILSON folgt. Allgemeine Gültigkeit kommt dem Ausdruck (30) jedoch niemals zu, und es ist daher nicht erstaunlich, daß, wenn überhaupt, nur wenige experimentelle Ergebnisse dadurch wiedergegeben werden.

Entartete Halbleiter erfordern naturgemäß eine besondere Behandlung des Leitfähigkeitsproblems. Für völlige Entartung findet man Verhältnisse, welche der metallischen Leitung ähnlich sind [81], während das Übergangsgebiet schwacher Entartung umständlicher zu diskutieren ist [36, 121].

3.12 Hall-Effekt

Die Untersuchung des Hall-Effektes hat sich für die Abklärung des Leitungsmechanismus in Halbleitern als außerordentlich aufschlußreich erwiesen. In einem in der x -Richtung von der Stromdichte j_x durchflossenen Leiter entsteht unter der Wirkung eines Magnetfeldes H_z eine zu j_x und H_z senkrecht stehende elektrische Feldstärke E_y von der Größe

$$E_y = R j_x H_z. \quad (31)$$

R ist die sogenannte Hall-Konstante. Die Elektronentheorie¹⁾ liefert für die Hall-Konstante eines Halbleiters mit gleichzeitiger Elektronen- und Löcherleitung

$$R = -\frac{3 \pi}{8 e} \cdot \frac{n_E b_E^2 - n_L b_L^2}{(n_E b_E + n_L b_L)^2}. \quad (32)$$

Speziell folgt daraus für einen Eigenhalbleiter ($n_E = n_L = n$)

$$R_I = -\frac{3 \pi}{8} \cdot \frac{1}{e n} \cdot \frac{b_E - b_L}{b_E + b_L}. \quad (33)$$

Für einen reinen Überschußleiter ($n_L = 0$) gilt

$$R_E = -\frac{3 \pi}{8} \cdot \frac{1}{e n_E}, \quad (34)$$

für reine Mangelleitung dagegen ($n_E = 0$):

$$R_L = +\frac{3 \pi}{8} \cdot \frac{1}{e n_L}. \quad (35)$$

In den Formeln (32) bis (35) bedeutet e den absoluten Betrag der Elektronen-

¹⁾ Siehe etwa H. FRÖHLICH [2].

ladung. Negatives Vorzeichen der Hall-Konstanten bedeutet daher negative Ladungsträger, d.h. Elektronen; positives Vorzeichen dagegen positive Ladungsträger, d.h. Löcher. Allein durch Ermittlung des Vorzeichens der Hall-Konstanten kann daher zwischen Überschuß- und Mangelleitung unterschieden werden. Für einen gemischten Leiter kann die Hall-Konstante nach (32) unter Umständen Null werden. Eine quantitative Bestimmung von R liefert außerdem die Zahl der Ladungsträger n_E bzw. n_L , deren Kenntnis natürlich von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Durch Kombination der Hall-Konstanten R mit der Leitfähigkeit σ gewinnt man ein weiteres bemerkenswertes Resultat. Multipliziert man nämlich σ für einen reinen Überschußleiter ($n_L = 0$) nach (22) mit der entsprechenden Formel für R nach (34), so ergibt sich

$$(R \sigma)_E = -\frac{3\pi}{8} b_E \quad (36)$$

und entsprechend für reine Mangelleitung

$$(R \sigma)_L = +\frac{3\pi}{8} b_L. \quad (37)$$

Messungen von σ und R als Funktion der Temperatur und deren Auswertung nach (36) bzw. (37) liefern daher direkt die wichtige Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit b bzw. der freien Weglänge l . Die Kombination von Messungen der Leitfähigkeit und der Hall-Konstanten ist daher unerlässlich für die Abklärung der Leitungsvorgänge in einem Halbleiter.

Der Einfluß der Entartung auf den Hall-Effekt ist sehr gering. Es ändert sich lediglich der Zahlfaktor in den Ausdrücken (32) bis (35), der bei völliger Entartung statt $3\pi/8 = 1,175$ genau 1 wird.

3.13 Magnetische Widerstandsänderung

Die Änderung der Leitfähigkeit σ bzw. des spezifischen Widerstandes ϱ ist ein mit dem Hall-Effekt eng gekoppeltes Phänomen. Die Theorie¹⁾ ergibt für die relative Änderung der Leitfähigkeit in einem Magnetfeld H :

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_H}{\sigma_0} = B(T) H^2. \quad (38)$$

Die quadratische Abhängigkeit gilt, solange $H \ll H_0$, wobei die kritische Feldstärke H_0 für Zimmertemperatur von der Größenordnung $500\,000 \text{ A cm}^{-1}$ ist.

¹⁾ Siehe etwa H. FRÖHLICH [2].

Für den temperaturabhängigen Koeffizienten $B(T)$ findet man

$$B(T) = \frac{4 - \pi}{\pi} (R \sigma_0)^2. \quad (39)$$

Die Größe $(R \sigma_0)^2$ ist nach (36) bzw. (37) für reine Überschuß- bzw. Mangelleiter bis auf konstante Faktoren gleich dem Quadrat der Beweglichkeit b .

Damit ist bei Vernachlässigung des Störungsanteils in (29) für $B(T)$ eine Temperaturabhängigkeit von der Form

$$B(T) \sim \frac{1}{T^3} \quad (40)$$

zu erwarten. Die Größe der Leitfähigkeitsänderung in einem konstanten Magnetfeld nimmt demnach auch für Halbleiter mit abnehmender Temperatur rasch zu, ähnlich wie es für Metalle bekannt ist.

Für starke Felder, d.h. $H \gg H_0$, sollte dagegen ein vom Material und der Temperatur unabhängiger Sättigungswert

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_\infty}{\sigma_0} = 0,117 \quad (41)$$

erwartet werden.

Aus Messungen der Temperaturabhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung allein lassen sich dieselben Schlüsse für den Temperaturgang der Beweglichkeit ziehen wie durch eine Kombination von Messungen der Leitfähigkeit und des Hall-Effektes.

3.2 Experimentelles

3.21 Untersuchungsmaterial

Es ist klar, daß alle bisherigen theoretischen Betrachtungen nur für *homogene* Halbleiter Gültigkeit besitzen können. Zwar wird ein Halbleiter naturgemäß niemals homogen im strengen Sinne des Wortes sein, solange man mit statistisch verteilten Störstellen des Gitters zu rechnen hat. Die Bedingung der Homogenität wird daher etwa gleichbedeutend sein mit der Forderung, daß sich in Bereichen mit Dimensionen von der Größenordnung der freien Weglänge eine *konstante Anzahl gleichartiger* Störstellen befindet.

Selbst diese Bedingungen werden im Experiment in den wenigsten Fällen erfüllt sein und sehr von den Umständen abhängen, unter denen die *Kristallisation* des Stoffes vor sich geht. Für den Experimentator wird daher die Beschaffung bzw. Herstellung geeigneter Präparate stets ein Hauptproblem darstellen. Die sehr zahlreichen experimentellen Arbeiten erstrecken sich auf Materialien von recht verschiedenartiger Beschaffenheit, nämlich:

1. Natürliche Einkristalle (Mineralien).
2. Synthetische Einkristalle; z. B. durch Sublimation oder aus Schmelzen mit und ohne Zusatz von Mineralisatoren.
3. Dichte, polykristalline Körper, z. B. erstarrte Schmelzen und in Verbindungen übergeführte, zusammenhängende Metallstücke (durchoxydierte Metallfolien).
4. Poröse, polykristalline Haufwerke, wie Preß- und Sinterkörper.
5. Kondensierte, polykristalline Schichten, durch Aufdampfen im Vakuum auf eine Unterlage.

Von allen Möglichkeiten ist zweifellos die zweite die zweckmäßigste, und zwar dürften durch Sublimation hergestellte Einkristalle wohl die eindeutigsten Verhältnisse bezüglich ihrer Reinheit liefern. Die Schwierigkeit des Verfahrens liegt jedoch darin begründet, hinreichend große Einkristalle zu erhalten.

FRITSCH [56] hat durch Sublimation hergestellte Einkristalle von ZnO untersucht. Die größten Kristalle waren Nadeln von ca. 5 mm Länge und einigen Zehntelsmillimetern Dicke. Über neue Messungen an ZnO-Einkristallen ist von HAHN, RUSSEL und MILLER [65] berichtet worden. Im übrigen bleibt jedoch in dieser Richtung noch sehr viel zu tun übrig.

Kristallisation aus der Schmelze kann zwar große Einkristalle liefern, doch ist stets damit zu rechnen, daß das unvermeidliche Tiegelmaterial und allenfalls zugesetzte Mineralisatoren in unkontrollierbarer Weise mit der zu präparierenden Substanz reagieren. Leitfähigkeitsmessungen an Einkristallen großer Reinheit wurden von CARTWRIGHT [38, 40, 41], DE KEYSER, TEMMERMANN und COLEBUNDERS [45] und BOTTOM [27] am Tellur durchgeführt. Die Kristalle wurden dabei meist nach einem von SCHMID und WASSERMANN [112] angegebenen Verfahren hergestellt. Zu den synthetischen Kristallen ist auch das SiC zu rechnen, das an gut ausgebildeten Präparaten namentlich von BUSCH und LABHART [36] untersucht worden ist. Allerdings handelte es sich dabei um ein industrielles Produkt von unbekanntem Reinheitsgrad, so daß gerade über die sehr wichtige Frage der Einschlüsse keine Kenntnisse vorliegen.

Ein anderes bemerkenswertes Verfahren hat ENGELHARD [49] angegeben. Danach ist es gelungen, einen Kupfereinkristall durch tagelanges Erhitzen an der Luft in einen homogenen und transparenten Cu₂O-Einkristall überzuführen.

Polykristallin erstarrte Schmelzkörper sind infolge der im allgemeinen sehr hoch liegenden Schmelztemperaturen der halbleitenden Verbindungen in den seltensten Fällen zugänglich. Für Si und Ge liegen die Verhältnisse zwar verhältnismäßig günstig, und den amerikanischen Arbeiten [10] liegt bisher ausschließlich solches Material zugrunde. Jedoch scheint auch in diesem Falle die Einhaltung genau reproduzierbarer Herstellungsbedingungen schwierig zu sein.

Ein weiteres Verfahren, das zu mehr oder weniger dichten Probekörpern führt, besteht darin, daß Metallfolien hoher Reinheit z. B. durch Oxydation in

eine zusammenhängende Oxydschicht übergeführt werden. Auf diese Weise haben in neuester Zeit WRIGHT und ANDREWS [130] Leitfähigkeitsmessungen an NiO ausgeführt.

Leider ist die weit überwiegende Zahl aller Leitfähigkeitsmessungen an porösem polykristallinem Material, meistens Preß- oder Sinterkörper, durchgeführt worden. Homogenität im oben definierten Sinn ist in solchen Präparaten wohl in den wenigsten Fällen zu erwarten, denn es muß damit gerechnet werden, daß die stöchiometrischen Verhältnisse an der Oberfläche der Kristallite anders sind als in ihrem Innern. Dadurch können Kontaktphänomene wirksam werden, die, wie wohl bekannt ist, zu völlig falschen Ergebnissen führen können. Diesem Umstand muß es zugeschrieben werden, daß die Untersuchungen verschiedener Autoren an ein und derselben Substanz, wenn auch in qualitative, so doch fast niemals in quantitative Übereinstimmung zu bringen sind.

Nicht viel günstiger liegen die Verhältnisse an halbleitenden Schichten, welche durch Aufdampfen des Metalls im Vakuum auf einen Auffänger und nachträgliche Oxydation erzeugt werden. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß Reduktions- und Oxydationsprozesse sehr leicht durchführbar sind. Die Schwierigkeit liegt aber in der Bestimmung von Absolutwerten der Leitfähigkeit, da sich die Dicke und die Dichte der Schicht nur ungenau bestimmen lassen. Messungen dieser Art sind z.B. von BAUER [20] an den Oxyden von Cd, Tl und Sn; von HINTENBERGER [70] am PbS und von FRITSCH [56] am ZnO ausgeführt worden.

3.22 Meßmethoden

An geometrisch wohldefinierten Proben wird die Leitfähigkeit in einfacher Weise durch eine Strom-Spannungsmessung ermittelt, wobei die Spannung statisch oder durch Kompensation zwischen zwei Sonden bestimmt wird. Messungen ohne Potentialsonden sind infolge der allgemein bekannten Gleichrichtereigenschaften eines Metall-Halbleiter-Kontaktes stets bedenklich.

In Anbetracht der Tatsache, daß die zur Untersuchung vorgesehenen Stoffe meist in Form mehr oder weniger feinkörniger Pulver vorliegen, verdienen die folgenden Verfahren Erwähnung.

VOELKL [125] und GUILLERY [62] betten die Körner der halbleitenden Substanz in ein verlustfreies Füllmaterial, z.B. Vaselin oder Quarzpulver, und benützen diese Mischung als Dielektrikum eines Kondensators. Zusammen mit einer Selbstinduktion bildet diese verlustbehaftete Kapazität einen Schwingungskreis, aus dessen Dämpfungsdecrement auf die Leitfähigkeit der leitenden Körner geschlossen werden kann. Ein Nachteil der Methode besteht darin, daß gute Messungen nur in einem relativ engen Wertebereich der Leitfähigkeit, etwa 10^{-5} bis $10^{-7} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, möglich sind.

Eine ähnliche, für hohe Leitfähigkeiten brauchbare Methode ist von KURTSCHATOW, KOSTINA und RUSINOW [86] angegeben worden. In den halbleitenden Körnern werden durch ein hochfrequentes Magnetfeld Wirbelströme induziert. Durch Messung der Temperaturerhöhung lässt sich sodann die Leitfähigkeit berechnen. Voraussetzung für genaue Messungen ist jedoch die Kenntnis der Teilchenform und -größe.

Endlich hat FAIRBROTHER [51] eine Meßmethode entwickelt, die namentlich für hohe Temperaturen brauchbar ist. Die Substanz, deren Leitfähigkeit gemessen werden soll, wird als dichte Schicht auf einen Wolframdraht aufgebracht, der geheizt werden kann. Dieses System wird in ein Gasentladungsrohr eingebaut. Die Leitfähigkeit der halbleitenden Schicht wird sodann aus einer Strom-Spannungsmessung bestimmt, wobei als eine Elektrode der W-Draht, als zweite das Plasma der Gasentladung dient. Die Methode ist allerdings nicht frei von schwerwiegenden Einwänden.

Mit Ausnahme der ersten sind wohl alle andern Methoden als Notbehelfe für Leitfähigkeitsmessungen zu betrachten. Für Messungen des Hall-Effektes kommt natürlich überhaupt nur die erste in Frage.

3.3 Ergebnisse

3.31 Verzeichnis halbleitender Substanzen

Die Zahl der untersuchten und als Halbleiter betrachteten Substanzen ist sehr groß. Zur Hauptsache handelt es sich dabei allerdings um orientierende Beobachtungen, während eine Analyse des Leitungsmechanismus nur in verhältnismäßig wenigen Fällen versucht worden ist. Nach einer sehr wertvollen Zusammenstellung von MEYER [95] sind folgende Substanzen als Halbleiter zu klassieren. Verbindungen, deren Leitungsart noch nicht sichersteht, sind in Klammer angeführt. Literaturzitate sind nur so weit angegeben, als es sich um Ergänzungen oder Korrekturen handelt, die auf Grund neuerer Arbeiten nötig geworden sind.

Überschußleiter

Al_2O_3 [66], TiO_2 , V_2O_5 , Fe_2O_3 , (CuO) , Cu_2O_3 [131], ZnO , MoO_3 , (ScN) , (Nb_2O_5) , CdO , CdS , CdSe , SnO_2 , SnSe [43], Cs_2S , Cs_2Se , BaO , BaTiO_3 [34], Ta_2O_5 , WO_3 , (Au_2O_3) , Hg_2S rot, $(\text{Hg}_2\text{S}$ schwarz), Tl_2O_3 , PbCrO_4 [60, 88], Bi_2Se_3 [43], U_3O_8 , (UO_3) .

Mangelleiter

Cr_2O_3 , (MnO) , CoO , (Co_3O_4) , NiO , CuJ , Cu_2O , Cu_2S , (Cu_2Se) , (Cu_2Te) , (GeO) , MoO_2 [71], Ag_2O , (SnO) , SnS [12], (Sb_2S_3) , (Tl_2O) , (Tl_2S) [71], (Bi_2O_3) , (Bi_2S_3) , (Bi_2Se_3) , (Bi_2Te_3) .

Amphotere Leiter

Si [106], SiC [36], (Cr₅O₉), (Mn₂O₃), (Mn₃O₄), (Co₃O₄), Ge [87, 107, 108, 109], RuO₂, (Os₂S₂), IrO₂, (PbO), PbS, PbSe, UO₂.

Im folgenden Abschnitt werden einige spezielle, besonders gut untersuchte Fälle genauer beschrieben.

3.32 Spezielle Beispiele

3.321 Zinkoxyd ZnO

Zinkoxyd wurde sehr häufig untersucht, und zwar von BACH [17] an natürlichen Einkristallen unbekannter Reinheit, dann von SOMMERRVILLE [123], JANDER und STAMM [78], FRIEDRICH [55] und GUILLERY [62] an Preßkörpern, ferner an gesintertem Material von SKAUPY [122], GUILLERY [64], MEYER [94], VON BAUMBACH und WAGNER [22].

Messungen an synthetischen Einkristallen aus analysenreinem ZnO wurden erstmals von FRITSCH [56] ausgeführt. Das Ergebnis seiner Messungen ist in Fig. 11 wiedergegeben. Die stark ausgezogenen Kurven 1 und 3 zeigen die Leitfähigkeit zweier frisch hergestellter ZnO-Kristalle. Die Leitfähigkeiten bei Zimmertemperatur sind 3,1 bzw. 1,4 $\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, und die Aktivierungsenergien betragen $\Delta E = 0,012$ bzw. 0,009 eV. Durch Glühen in einer Sauerstoffatmosphäre während 30 h bei 900°C erniedrigen sich die Leitfähigkeiten bei Zimmertemperatur sehr stark bis auf einen Wert von $4 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$. Gleichzeitig ist eine Zunahme der Aktivierungsenergie bis auf 0,4 eV zu beobachten (Kurven 24, 28 und 30). Zwischen 300 und 80°K ergibt sich in allen Fällen $\log \sigma$ als Funktion von $1/T$ als gerade Linien, wie es nach (30) für einen reinen Überschuß- oder den Messungen von v. BAUMBACH und bei hohen Temperaturen eine eindeu-

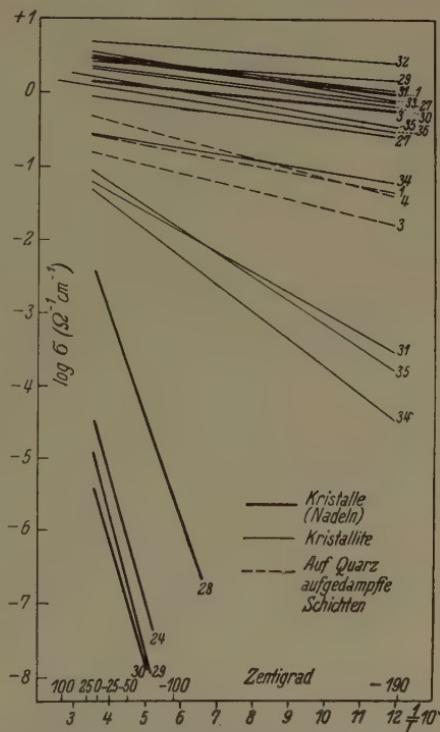


Fig. 11. Elektrische Leitfähigkeit des ZnO bei tiefen Temperaturen. (Nach FRITSCH.)

(Fig. 12), und zwar gilt bei konstanter Temperatur die empirische Beziehung

$$\sigma = \text{const } p^{-1/4,3}.$$

Die Leitfähigkeit nimmt also mit zunehmendem O-Druck, d. h. mit abnehmendem stöchiometrischem Überschuß an Zn ab. ZnO ist demnach ein Überschußleiter. Dies ist von FRITSCH durch Messungen des Hall-Effekts direkt bestätigt. Leider gelang es FRITSCH nicht, den Hall-Effekt an denselben Einkristallen zu messen,

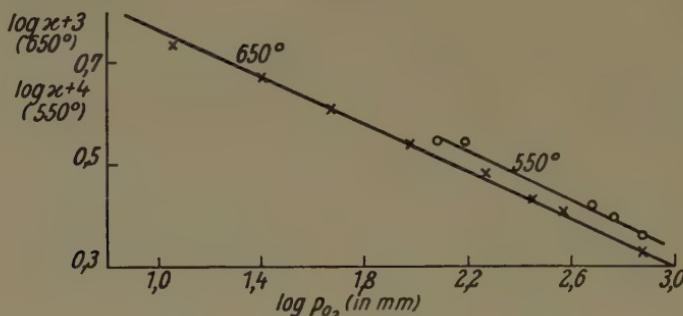


Fig. 12. Leitfähigkeit des ZnO als Funktion des Sauerstoffdrucks.
(Nach v. BAUMBACH und WAGNER.)

sondern nur an gesinterten Platten. Für die Hall-Konstante R ergeben sich Werte zwischen $-7,5$ und $-380 \text{ cm}^3/\text{As}$, entsprechend einem negativen Vorzeichen der Ladungsträger. Die Beweglichkeiten b_E liegen zwischen 7 und $30 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und zeigen eine auffallend schwache Zunahme mit sinkender Temperatur.

HAHN, RUSSEL und MILLER [65] haben neuerdings Messungen an Einkristallen und gesinterten Proben durchgeführt. Sie finden für Einkristalle höhere Beweglichkeiten, nämlich $b_E \sim 100 - 200 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, für gesintertes Material hingegen nur $5 - 60 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, d. h. in größerenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit FRITSCH. Die kleineren Beweglichkeiten für polykristallines Material können durch Einflüsse der Korngrenzen bedingt sein. Es ist aber auch denkbar, daß in den hexagonalen ZnO-Kristallen eine ausgeprägte Anisotropie der Beweglichkeiten vorliegt, die in gesintertem Material verwischt wird.

Noch unabgeklärt ist die starke Abnahme der Aktivierungsenergie mit zunehmender Konzentration der überschüssigen Zn-Atome. Nach MOTT [6] muß die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, daß bei hohen Konzentrationen eine wechselseitige Beeinflussung der Bahnen der an die Störstellen gebundenen Elektronen eintritt, welche die Aktivierungsenergie erniedrigt.

Oberhalb Zimmertemperatur sind die Verhältnisse nicht viel einfacher. Nach v. BAUMBACH und WAGNER steigt die Leitfähigkeit bis etwa 900°K exponentiell mit $1/T$ an. Für höhere Temperaturen erfolgt jedoch eine langsamere Zunahme. Ob es sich dabei wirklich um eine «Sättigung» handelt, wie MILLER

[97] glaubt, bleibe dahingestellt. MILLER findet an gesinterten Proben oberhalb 600°K ein ähnliches Verhalten wie v. BAUMBACH und WAGNER und gibt für die Aktivierungsenergie dieses Astes 0,71 eV an (Fig. 13). Die Messungen erfolgten so rasch, daß sich kein Gleichgewichtszustand mit dem Sauerstoff der umgebenden Luft einstellen konnte. Die Störstellenzahl ist somit konstant und

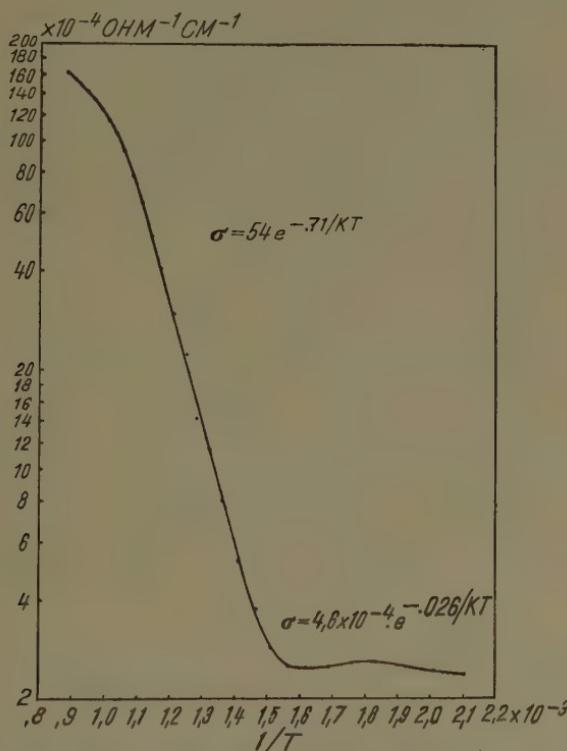


Fig. 13. Elektrische Leitfähigkeit des ZnO bei hohen Temperaturen. (Nach MILLER.)

die Leitfähigkeit reversibel. Zwischen 300 und 400°K wird bei gewissen Proben eine schwache Abnahme der Leitfähigkeit und Zunahme der Beweglichkeit mit steigender Temperatur beobachtet. Es ist schade, daß MILLER, der im wesentlichen die früheren Arbeiten bestätigt, keine zusammenhängenden Kurven über das ganze von ihm untersuchte Temperaturgebiet gegeben hat.

Im ganzen gesehen ist trotz der vielen experimentellen Arbeiten noch keineswegs ein quantitatives Verständnis des Leitungsmechanismus im ZnO erzielt worden. Weitere sorgfältige Arbeiten an wohl ausgebildeten Einkristallen scheinen daher unerlässlich.

Untersuchungen an gepfeilten und ungepfeilten Flügeln bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten

Von JAKOB ACKERET, MAX DEGEN und NIKOLAUS ROTT, Zürich¹⁾

Bekanntlich bietet die experimentelle Untersuchung von Objekten im Windkanal besondere Schwierigkeiten bei Geschwindigkeiten, die sich der Schallgeschwindigkeit nähern. Der tiefere Grund liegt darin, daß in diesem Geschwindigkeitsgebiet eine außerordentliche Empfindlichkeit der Strömung auf kleine Querschnittsänderungen vorhanden ist. Für einen geschlossenen Kanal liefert die Kontinuitätsgleichung

$$f U \varrho = \text{const}$$

zusammen mit der Schallgeschwindigkeitsformel

$$a^2 = \frac{dp}{d\varrho}$$

und der Bewegungsgleichung

$$U dU = - \frac{dp}{\varrho}$$

die einfache Beziehung

$$\frac{dU}{U} = - \frac{df}{f} \cdot \frac{1}{1 - M^2},$$

wo $M = U/a$ die Machzahl bedeutet.

Bei $M \rightarrow 1$ wird die Empfindlichkeit also unendlich groß. Das hat zunächst zur Folge, daß man in einem Kanal von konstantem Querschnitt vor dem Modell die Schallgeschwindigkeit nicht erreichen kann. Diese tritt vielmehr in der Gegend des größten Hauptspantes des Modells auf; der Kanal ist dann blockiert. Höhere Anströmmachzahlen sind bei stationärer Strömung nicht mehr möglich.

Man sieht an diesem Grenzfall, daß die endliche Größe des Kanals zu Unterschieden gegenüber dem Strömungszustand in der freien Atmosphäre führen wird, und es sind beträchtliche Anstrengungen gemacht worden, durch geeignete rechnerische Korrekturen von den Versuchswerten im endlich großen Kanal auf den durch Wände ungestörten Fall überzugehen.

Es besteht im Prinzip zwar die Möglichkeit, die Kanalwände so zu formen, daß sie zu der gesuchten Strömung passen. Wenn wir wüßten, wie die Strom-

¹⁾ Institut für Aerodynamik, ETH.

linien bei der gewünschten Machzahl aussehen, so würde die Solidifikation irgendwelcher Stromflächen außerhalb des Modells die Strömung nicht ändern (von Reibungseffekten an den Kanalwänden abgesehen). Man hätte dann eine störungsfreie Messung. Allein die Tatsache, daß man das Strombild zunächst ja nur ungenau kennt und daß es von der Machzahl und von der Stellung des Modells gegenüber der Anströmrichtung abhängt, macht die damit verbundene «trial and error»-Methode äußerst mühsam und zeitraubend.

Ein anderes Vorgehen findet sich bei FELDMANN¹⁾. Er untersucht drei geometrisch ähnliche Modelle verschiedener Größe bei gleichen Reynolds-Zahlen und extrapoliert auf die Modellgröße Null bzw. auf die Kanalweite unendlich. Da die Kanalstörungen mit abnehmender Modellgröße gegen Null gehen, dürfte die Extrapolation prinzipiell zulässig sein. Nun kann man aber nicht beliebig kleine Modelle verwenden, und es stellt sich die Frage nach dem Verlauf der Extrapolation bei verschwindender Modellgröße.

Im folgenden soll zunächst diese Frage behandelt werden. Dabei soll noch eine nicht unwichtige Nebenaufgabe erwähnt werden. Bekanntlich werden die kritischen Erscheinungen an Tragflügeln zu höheren Machzahlen verschoben, falls der Flügel gepfeilt wird. Das ist bei einem Versuch im Windkanal sofort zu bestätigen. Man könnte aber vermuten, daß der gemessene Pfeilungseffekt mindestens zum Teil durch den Kanal beeinflußt wird. Da ist es nun vorteilhaft, die nach FELDMANN extrapolierten Werte von geraden und gepfeilten Flügeln (bei gleichen Profilen und Reynolds-Zahlen) direkt zu vergleichen. Ebenso wird es möglich sein, falls man Profile von verschiedener Dicke untersucht, die sogenannte Kármánsche Regel zu prüfen.

1. Die rechnerischen Methoden der Kanalkorrektur

Jeder Kanalkorrektur beim Auftrieb Null, welchen Fall wir im folgenden stets betrachten werden, liegt die Annahme zugrunde, daß die Strömung in der nächsten Umgebung des Modells dieselbe ist wie in der freien Atmosphäre, daß aber die Anströmgeschwindigkeit in einiger Distanz vor dem Objekt im Kanal anders ist als im Freien. Man hat also zu bestimmen, welches der Unterschied zwischen der mittleren lokalen Geschwindigkeit in der Nähe des Modellortes und der Kanalgeschwindigkeit vor dem Modell ist. Das kann so geschehen, daß zuerst in bekannter Weise der Einfluß der festen Wände durch doppelperiodische Spiegelung bestimmt und sodann mit den Methoden der linearisierten Theorie die Kompressibilität berücksichtigt wird. Wäre die Strömung wider-

¹⁾ F. K. FELDMANN, *Untersuchung von symmetrischen Tragflügelprofilen bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten in einem geschlossenen Windkanal*, Mitt. Inst. Aerodynamik ETH., Nr. 14 (Leemann, Zürich 1948).

standsfrei, so könnte das Modell durch eine geeignete Quell-Senkenverteilung dargestellt werden, deren Spiegelbilder, da das Modell ja immer relativ klein im Vergleich zu den Kanalabmessungen ist, als einfache Dipole angenommen werden dürfen. Die gleichwertige Dipolstärke ist dem Volumen des Objektes proportional. Die Zusatzgeschwindigkeit ΔU_{i_1} lässt sich einfach berechnen und ergibt sich zu

$$\frac{\Delta U_{i_1}}{U_0} = \varepsilon_{i_1} = k \frac{V}{F_K^{3/2}}, \quad (1)$$

wobei

V = Modellvolumen

F_K = Kanalquerschnitt

k = ein Zahlenfaktor

U_0 = die unkorrigierte gemessene Anströmgeschwindigkeit im Kanal

bedeuten. k ist von der Form des Meßquerschnittes und des Modells abhängig. Für kleine Modelle ist aber, wie oben erwähnt, die Modellform unwesentlich. So findet THOM¹⁾ für Rotationskörper und Flügel endlicher Spannweite und mittelgroßer Schlankheit den Wert $k = 0,90$ für einen rechteckigen Kanal mit dem Verhältnis Höhe:Breite = 0,7. Für quadratische Kanäle ergab eine Nachrechnung nach derselben Methode den Wert $k = 0,81$.

Hat das Modell einen Widerstand, so entsteht hinter ihm eine Schicht von verlangsamter Geschwindigkeit, deren Profil als «Delle» bezeichnet wird. Man kann mit einiger Annäherung, wie sie für Korrekturen ja notwendig ist, die Verdrängungswirkung des Nachlaufs durch diejenige einer einfachen Quellströmung ersetzen. (Es kommt ja nur die Wirkung der gespiegelten Quellen in Frage, und da sind die Details des Verdrängungsvorganges nicht wesentlich.) Die Anströmgeschwindigkeit im Kanal weit vor dem Modell wird dadurch gegenüber der freien Atmosphäre um den Betrag ΔU_{i_2} vermindert. Es ist

$$\frac{\Delta U_{i_2}}{U_0} = \varepsilon_{i_2} = \frac{c_w}{4} \frac{F_B}{F_K}, \quad (2)$$

wobei F_B die Bezugsfläche (z. B. Flügel-Grundrißfläche) ist, und

$$c_w = \frac{W_{gem}}{F_B \varrho U_0^{3/2}}.$$

Zwischen der gemessenen Anströmgeschwindigkeit U_0 im Kanal und der gleichwertigen Anströmgeschwindigkeit im unbegrenzten Strom besteht also, inkom-

¹⁾ A. THOM, *Blockage Corrections in a Closed High-speed Tunnel*, R. & M. 2033 (1943).

pressibel gerechnet, ein Unterschied:

$$\frac{\Delta U_i}{U_0} = \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2}. \quad (3)$$

Zur Berücksichtigung der Kompressibilität kann in linearisierter Näherung die Umrechnung nach der verallgemeinerten Prandtl-Regel vorgenommen werden. Nach der Rechnung von GÖTHERT¹⁾ ergibt sich:

$$\frac{\Delta U_K}{U_0} = \varepsilon_K = \frac{\varepsilon_{i_1}}{(1 - M_0^2)^{3/2}} + \frac{\varepsilon_{i_2}}{1 - M_0^2}, \quad (4)$$

wobei M_0 die zu U_0 gehörende Machzahl ist.

THOM²⁾ gibt den Ausdruck

$$\frac{\Delta U_K}{U_0} = \varepsilon_K = \frac{\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2}}{(1 - M_0^2)^{3/2}} \quad (5)$$

ohne genauere Begründung. Wenn der Ersatz des Nachlaufs durch eine einfache Quelle ernst genommen wird, erscheint die Umrechnungsformel von GÖTHERT theoretisch besser begründet.

Für die Korrektur der Machzahl erhält man

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \varepsilon_K \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right) \quad (6)$$

aus dem adiabatischen Zusammenhang zwischen U und M (für kleine ΔU und ΔM).

Schließlich kann der Widerstandsbeiwert c_w auf den zum korrigierten Wert von M gehörenden Staudruck $q = \rho U^2/2$ umgerechnet werden, wo sowohl U als auch ρ entsprechend korrigiert sind. — Würde man die Widerstandskraft auf den Ruhedruck p_K beziehen, also

$$c_{wK} = \frac{W_{gem}}{p_K F_B}$$

bilden, so wäre c_{wK} vom Verhältnis Kanalabmessung : Modellabmessung unabhängig, sofern die korrigierte Machzahl dieselbe ist. Es ist also:

$$c_{wkorr} = c_{wgem} \frac{q_{gem}}{q_{korr}}.$$

Der Verlauf des Widerstandsbeiwertes c_w über der Machzahl M bei verschiedenen Modellgrößen, aber konstanter Reynolds-Zahl, sei bekannt. Nach

¹⁾ B. GÖTHERT, Windkanal-Korrekturen bei hohen Luftgeschwindigkeiten, Lilienthal-Ges. Luftfahrtforsch., Ber. Nr. 127, S. 114 (1940).

²⁾ A. THOM, l.c.

unserer Grundannahme gibt es nun auf den c_w -Kurven zweier verschiedener Modelle entsprechende Punkte, bei denen die Strömung in der nächsten Umgebung des Modells ähnlich ist bei verschiedenen Anströmmachzahlen. Für diese beiden Punkte sollten also die Werte $c_{w_{gem}} q_{gem}/\rho_K$ gleich groß sein. Die Annahme läßt sich prüfen, indem man den Strömungszustand in beiden Punkten ermittelt und vergleicht. Dies kann bis zu einem gewissen Grade (wie schon FELDMANN¹⁾ erwähnt hat) dadurch geschehen, daß die Schlierenbilder beider Zustände verglichen werden. In Fig. 1 sind für zwei Modelle solche entsprechenden Bilder auf gleiche Flügeltiefe kopiert dargestellt, die eine recht gute Übereinstimmung zeigen. Wenn auch die Unterschiede in den Machzahlen nicht bedeutend scheinen, so stellt das weitgehend gleiche Aussehen der Schlierenbilder ein empfindliches Kriterium dar. Aus Fig. 2 ist nämlich ersichtlich, daß das Schlierenbild eines Modells sich auch bei kleinen Machvariationen merklich verändert.

2. Messungen

Zunächst wurden anschließend an die Arbeit von FELDMANN¹⁾ Messungen an Tragflügeln mit rechteckigem Grundriß vorgenommen, Seitenverhältnis 3,25, mit 12% bzw. 9% dicken Profilen NACA 0 - 0012 - 1,1 - 30 bzw. 0 - 0009 - 1,1 - 30. Weiterhin wurden um 35° rückwärtsgepfeilte Tragflügel untersucht mit den gleichen Profilen in Flugrichtung wie die entsprechenden Rechteckflügel, sowie mit der gleichen konstanten Tiefe und Spannweite. Ge- messen wurde jeweils an ähnlichen Modellen verschiedener Größe:

Flügelnummer	Spannweite in Millimeter	Tiefe in Millimeter
1	260	80
2	211	65
3	162,5	50

Meßreihen:

A I: Gerader Flügel,	Profil 12%,	Flügelnummer 1, 2, 3.
A II: Gerader Flügel,	Profil 9%,	Flügelnummer 1, 2.
B I: Pfeilflügel 35°,	Profil 12%,	Flügelnummer 1, 2, 3.
B II: Pfeilflügel 35°,	Profil 9%,	Flügelnummer 1, 2, 3.

Die genaue Beschreibung der Meßeinrichtungen (Meßstrecke, Stützen, Waage) findet sich bei FELDMANN¹⁾. Hier sollen nur einige Einzelheiten hervorgehoben werden.

a) Meßstrecke

In der Meßstrecke soll mit eingebauten Stützen ohne Modell in Stromrichtung konstanter statischer Druck herrschen. Um dies zu erreichen und jeden Blockierungs- und Deblockierungseffekt möglichst auszuschalten, wurde das

¹⁾ F. K. FELDMANN, l.c.

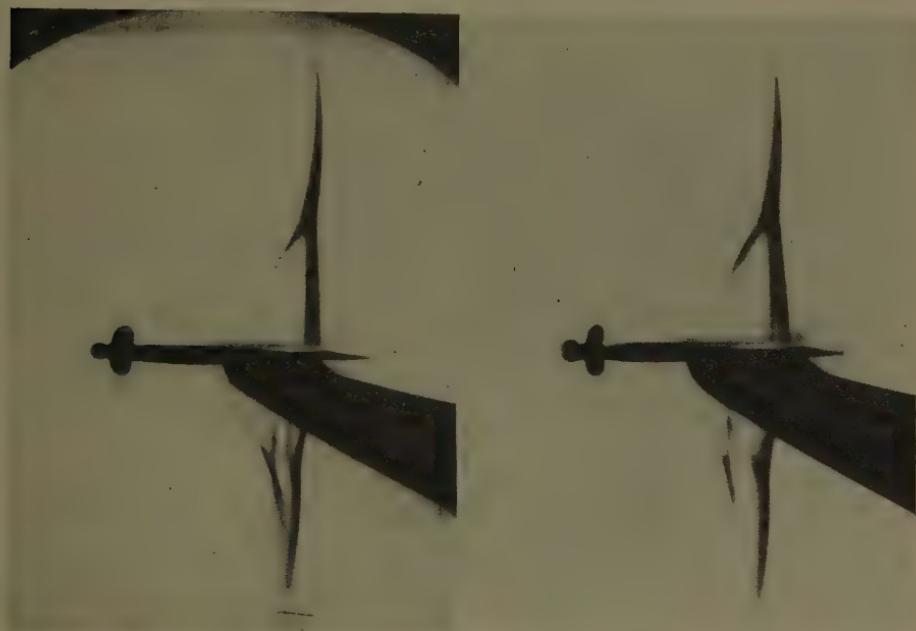


Fig. 1.

Schlierenaufnahmen an zwei geometrisch ähnlichen geraden Flügeln mit 9% Profildicke;
a: Größe Nr. 1, *b*: Größe Nr. 2, auf gleiche Tiefe kopiert. Die im Kanal gemessene Machzahl ist
 $M_{\text{gem}} = 0,89$, *b*: $M_{\text{gem}} = 0,90$; die korrigierte Machzahl ist in beiden Fällen $M_{\text{korr}} = 0,919$.
 Die Schlierenbilder sind weitgehend gleich.



Fig. 2.

Schlierenaufnahmen am geraden Flügel mit 9% Profildicke, Größe Nr. 2 für verschiedene
 Machzahlen: *a*: $M_{\text{korr}} = 0,885$; *b*: $M_{\text{korr}} = 0,905$.

Verdrängungsvolumen der beiden gepfeilten Stützen kompensiert und der Flächenquerschnitt für den Luftdurchsatz konstant gehalten. Dies geschieht durch Ausnahme an vier hölzernen Eckleisten, welche in der quadratischen Meßstrecke ($F_K = 1560 \text{ cm}^2$) angebracht sind. Die maximale flächenmäßige Ausnahme betrug $8,6 \text{ cm}^2$, sie entspricht dem maximalen Verdrängungsquerschnitt der Stützen.

Die Festlegung der Anströmmachzahl erfolgte durch Messung des Ruhedruckes p_K im Kasten und der Bestimmung der Druckdifferenz zwischen Kasten und Meßstrecke. Der statische Druckanschluß in der Meßstrecke war je nach Modellgröße 230 bis 245 mm vor der Vorderkante der Modelle an der Kanaloberseite angebracht. Als Meßinstrumente dienten Quecksilbermanometer, deren Ablesegenauigkeit $1/20 \text{ mm Hg}$ betrug. — Die Regulierung auf konstante Reynolds-Zahl erfolgte durch Variation der Dichte ($Re \cong 400\,000$).

b) Stützeneichung

Da die Stützenwiderstände gegenüber den Profilwiderständen prozentuell groß sind, ist eine genaue Eichung notwendig. Dabei ist die Beeinflussung des Flügels auf die Stützen und umgekehrt zu berücksichtigen, so daß die Stützeneichungen unter möglichst ähnlichen Bedingungen durchgeführt werden sollen, wie sie später bei den Messungen auftreten. Es wurden deshalb Modelle, die für diesen Zweck aus Holz hergestellt waren, an zwei dünnen Hilfsstreben starr im Kanal über die Stützen montiert. Kleine Ausnahmen an der Flügelunterseite gestatteten den Stützen mit einem Spiel von 2 mm hin und her zu pendeln und die Schraubengewinde, die in den Flügel hineinragten, dem Luftstrom zu entziehen.

Da durch das Anbringen der Hilfsstreben der Kanalquerschnitt verkleinert und dadurch die Blockiermachzahl geändert wird, muß bei der Stützeneichung speziell darauf geachtet werden, durch entsprechende Materialwegnahme an den oberen Eckleisten den Flächenquerschnitt der Meßstrecke konstant zu halten.

Es wurden zwei verschiedene Stützen verwendet, die im Flügelanschlußteil verschiedene Tiefen hatten, so daß die geometrische Ähnlichkeit des Flügelanschlusses für die beiden größeren Modelle annähernd gewährleistet war.

3. Diskussion der Meßergebnisse

Zu Punkten mit gleichen $c_w q/p_K$, gemessen an verschiedenen großen Modellen und damit bei verschiedenen Anströmmachzahlen im Kanal, sollte die gleiche korrigierte Machzahl gehören. Die rechnerischen Korrekturen können also durch Erfüllung dieser Bedingung eine experimentelle Stützung erhalten.

Die bei verschiedenen Modellgrößen für $c_w q/p_K = \text{const}$ gemessenen Machzahlen wurden über dem Verhältnis Stirnfläche:Kanalfäche ($= F_s/F_K$) der

Modelle aufgetragen. (Fig. 3 und 4, obere Hälfte, leere Kreise durch feste Linien verbunden.) Ebenfalls über F_s/F_K aufgetragen wurden die jeweiligen gerechneten korrigierten Machzahlen [volle Kreise: nach THOM, Gleichung (5); volle Dreiecke: nach GÖTHERT, Gleichung (4)]. Sie sollten für alle Modelle gleich sein, d.h. ihre Verbindungslien (dünne ausgezogene: THOM; gestrichelt: GÖTHERT) müßten in den Fig. 3 und 4 vertikal stehen. Man sieht, daß allgemein die Größenordnung der gerechneten Korrekturen nach diesem Kriterium richtig erscheint; nur ein Teil der Linien ist wenig geneigt. Mit abnehmender Modellgröße können wir den korrigierten Machzahlen wachsendes Gewicht beilegen. Wenn sich also die dünne Verbindungslien der M_{korr} mit abnehmendem F_s/F_K gegen größere Machzahlen neigt, so ist die Korrektur zu klein und umgekehrt. Man sieht, daß demnach die Korrektur nach THOM bis etwa $M_{korr} = 0,84$ etwas zu klein ist, über $M_{korr} = 0,93$ zu groß. Nach unseren Messungen ergibt sich dies unabhängig von Dicke und Flügelform. Die Göthertschen Korrekturen, die sich nur für größere Werte von c_w von den Thomschen merklich unterscheiden, sind dort zu klein bis etwa $M_{korr} = 0,93$.

Um auch in denjenigen Fällen zu einem Ergebnis zu gelangen, wo die Korrekturen rechnerisch nicht auf den gleichen Wert führen, würde eine Extrapolation nach FELDMANN vorgenommen. Die gemessenen Machzahlen über F_s/F_K werden durch eine Kurve verbunden (feste Linien in den Fig. 3 und 4 oben) und auf $F_s/F_K = 0$ extrapoliert. Dabei wird für das Endverhalten gegen $F_s/F_K = 0$ der Tendenz der theoretischen Korrektur Rechnung getragen. Es zeigt sich dann, daß für Machzahlen bis etwa 0,84 die Extrapolationskurven sich etwas gegen kleine M krümmen, darüber praktisch geradlinig gezogen werden dürfen. Über $M_{korr} = 0,92$ (was bei unseren Messungen nur für Pfeilflügel auftrat), sollten gemäß der gerechneten Korrektur nach THOM die Extrapolationskurven beginnen, sich gegen größere M zu krümmen. In der vorliegenden Arbeit wurde aber bis zu den größten Machzahlen möglichst geradlinig extrapoliert. Die von der gerechneten Korrektur geforderte Krümmung ist nämlich durch das sehr rasche Ansteigen des Faktors $(1 - M^2)^{-3/2}$ in der Nähe von $M = 1$ bedingt. Bei kleiner werdendem F_s/F_K wird die in den Korrekturen (4) und (5) einzusetzende Machzahl immer größer. Man kann aber einen nach der linearisierten Theorie gewonnenen Faktor, der für $M \rightarrow 1$ auf Unendlich führt, so nahe an $M = 1$ kaum voll berücksichtigen. Eine Stützung unseres Vorgehens konnte die Kármánsche Regel erbringen (siehe später).

Bei diesen höchsten Machzahlen liegen die Messungen fast an der Blockierungsgrenze. Verfolgt man jedoch die gemessenen Machzahlen für $c_w, q/p_K = \text{const}$ über F_s/F_K , so entfernen sich diese mit kleiner werdendem F_s/F_K von der Blockierungsgrenze immer mehr. Man kann deshalb annehmen, daß in diesem Gebiet die Werte gerade durch die Extrapolation an Zuverlässigkeit gewinnen.

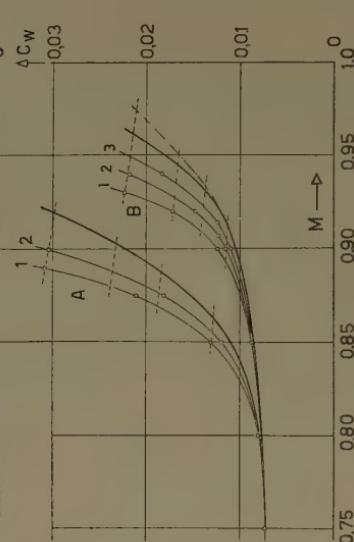
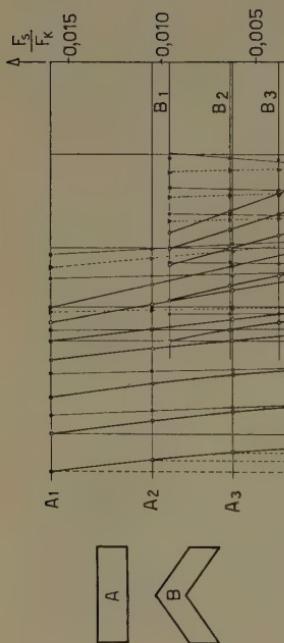
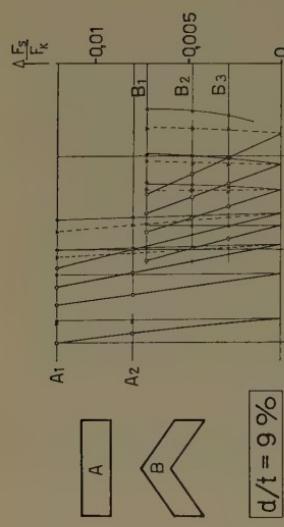


Fig. 4.

Fig. 3. Widerstandsbeiwert c_w über der Machzahl M für 12% dicker Profil, A: gerader Flügel, B: 35° rückwärts gepfeilter Flügel. Meßreihen an verschiedenen großen Flügeln Nr. 1, 2, 3. Fest ausgezogen: extrapolierte Kurve c_w über M . Strichpunktiert: korrigiert nach Thom. Obere Hälfte: Zusammenhang zwischen zugeschneiderten Machzahl und (Stirnfläche: Kanalfläche =) F_s/F_K bei $c_w q/\rho_K = \text{const}$. dar gestellt durch leere Kreise, mit voll gezogenen Extrapolationen verbunden. Daneben korrigierte Machzahlen nach Thom (volle Kreise, durch dünne Linien verbunden) und nach Göthert (völlig Dreiecke, durch dünne gestrichelte Linien verbunden).

Fig. 4. Wie Fig. 3, für 9% dickeres Profil.

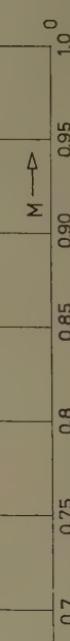


Fig. 3.

In den Fig. 3 und 4 unten sind die extrapolierten Kurven c_w über M fest ausgezogen. Der Vergleich von geraden und gepfeilten Flügeln zeigt, daß der Unterschied in den Machzahlen bei gleichem c_w für die extrapolierten Kurven noch etwas größer ist als bei den gemessenen. Die Pfeilflügelmessung des schallnahen Widerstandsanstieges ist also stärker durch den Kanal beeinflußt, trotzdem die Versperrung abnimmt, da der Anstieg bei höheren Machzahlen stattfindet und so die Kanalkorrekturen größer sind. Würde man die Thomsche Korrektur bis zu den höchsten Machzahlen verwenden (Fig. 3 und 4, strichpunktuiert), so wäre der Unterschied noch größer.

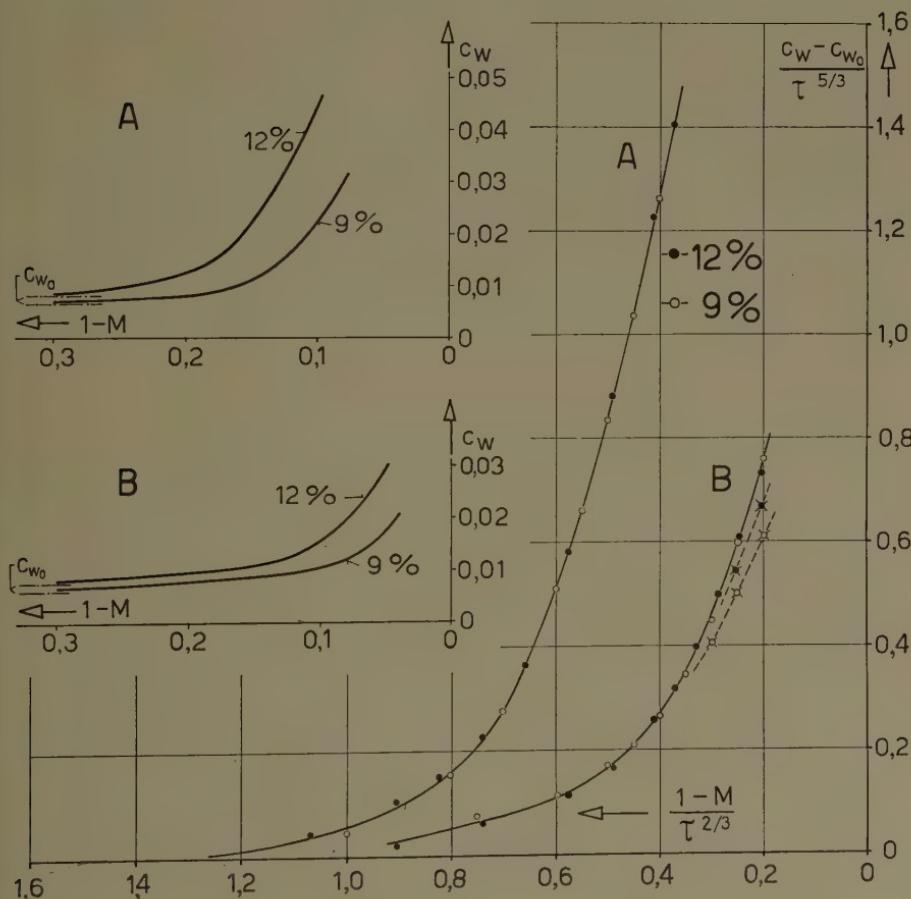


Fig. 5. Die Kármánsche Regel. A: gerader Flügel, B: 35° rückwärts gepfeilter Flügel. Volle Kreise: $\tau = 0,12$; leere Kreise: $\tau = 0,09$. Gleicher gilt für durchkreuzte Kreise, die zu den nach THOM korrigierten Werten für den Pfeilflügel gehören. – Zum Vergleich sind auch die extrapolierten Kurven über den unverzerrten Maßstäben eingezzeichnet.

4. Ähnlichkeitstheorie der schallnahen Strömung

Nach der Kármánschen Ähnlichkeitstheorie der schallnahen Strömung¹⁾ sollen die Kurven c_w über M für ähnliche, aber verschieden dicke Profile durch eine Maßstabsänderung zur Deckung gebracht werden können. Für ebene Strömung gilt die Regel: Bezeichnen wir das Verhältnis von Profildicke d zur Tiefe t mit $d/t = \tau$, so sollen für verschiedene Dicken die Kurven $c_w/\tau^{5/3}$ über $(1 - M)/\tau^{2/3}$ aufeinanderfallen. Dabei ist nur derjenige Teil von c_w zu nehmen, der dem Druckwiderstand in schallnäher Strömung (verbunden mit schwachen Stößen) entspricht. Deshalb wurde der konstante Anteil c_{w_0} des Reibungswiderstandes bei kleineren Machzahlen durchwegs abgezogen. Bei $\tau = 0,12$ ist $c_{w_0} = 0,008$, bei $\tau = 0,09$ ist $c_{w_0} = 0,0072$.

Die Anwendung der Kármánschen Regel auf die extrapolierten Werte ergab sowohl beim geraden als auch beim gepfeilten Flügel sehr befriedigende Resultate (Fig. 5). Die Regel wurde für den Pfeilflügel auch auf die nach THOM korrigierten Verläufe angewendet, wobei sich eine weniger gute Übereinstimmung ergab. Dies mag zur Stützung der verwendeten Extrapolation angeführt werden. Es ist bemerkenswert, daß die Kármánsche Regel auch bei den hier vorliegenden endlichen Seitenverhältnissen und Stoßstärken gültig zu sein scheint.

Summary

In the high-speed wind tunnel of the Institute for Aerodynamics, E.T.H. Zürich, straight and swept-back wings have been investigated at high subsonic speeds. Drag measurements at zero incidence were made on a series of geometrically similar models at the same Reynolds Number, which was maintained constant by change of density. By this, theoretical tunnel correction formulas could be checked and an extrapolation to vanishing tunnel influence was possible; straight and swept-back wings were compared after corrections.

Two different profile thicknesses (9 and 12%) have been investigated. The transonic drag-Mach Number relation for different thicknesses was found to be in a very satisfactory agreement with VON KÁRMÁN's similarity law.

(Eingegangen: 27. 9. 49.)

¹⁾ TH. VON KÁRMÁN, *The Similarity Law of Transonic Flow*, J. Math. Phys. 26, 182–190 (1947).

Über Scheinwiderstände mit vorgeschriebenem Verhalten des Phasenwinkels

Von ERNST BAUMANN, ETH., Zürich

Wir legen uns die Aufgabe vor, einen Scheinwiderstand oder, was auf das-selbe hinauskommt, einen Scheinleitwert mit folgender Frequenzabhängigkeit des Phasenwinkels zu finden:

Im Intervall $0 < \omega < \omega_0$ soll $\operatorname{tg} \varphi$ von Null an stetig auf den Wert $\operatorname{tg} \varphi_1$ an-wachsen.

Im Intervall $\omega_0 < \omega < \omega_1$ soll $\operatorname{tg} \varphi$ möglichst konstant sein, jedenfalls die Schranke $\operatorname{tg} \varphi_1$ nicht unter- und die Schranke $\operatorname{tg} \varphi_2$ nicht überschreiten.

Im Intervall $\omega_1 < \omega < \infty$ soll $\operatorname{tg} \varphi$ stetig wachsen und schließlich den Wert ∞ annehmen.

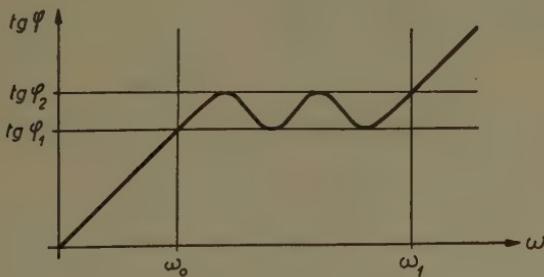


Fig. 1
Verlauf des gesuchten Phasenwinkels.

In Fig. 1 ist das verlangte Verhalten angedeutet. Derartige Scheinwiderstände sind in der Theorie der gegengekoppelten Verstärker wünschenswert und nützlich.

Ganz allgemein gelten die folgenden Zusammenhänge: Jeder Scheinwiderstand $\Im(j\omega)$, der aus einer endlichen Anzahl von Schaltelementen besteht, ist eine rationale Funktion der komplexen Kreisfrequenz $j\omega$. Sein Phasenwinkel liegt für alle Frequenzen zwischen $+\pi/2$ und $-\pi/2$ (positiver Realteil). Sind f und g zwei Polynome in $j\omega$, so können wir schreiben:

$$\Im(j\omega) = \frac{f(j\omega)}{g(j\omega)} = \frac{f(j\omega) g(-j\omega)}{|g|} = \frac{|f|}{g(j\omega) f(-j\omega)}. \quad (1)$$

Bedeutet G den geraden, U den ungeraden Teil des Polynoms $f(j\omega) g(-j\omega)$, so ist auch:

$$\Im(j\omega) = \frac{G+U}{|g|} = \frac{|f|}{G-U}. \quad (2)$$

Daraus finden wir für den Phasenwinkel $\varphi = \varphi(\omega)$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U}{jG}. \quad (3)$$

Der Tangens des Phasenwinkels von jedem Scheinwiderstand ist also eine ungerade rationale Funktion der Kreisfrequenz ω .

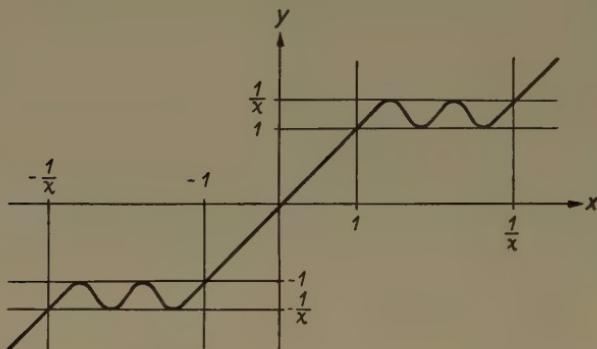


Fig. 2
Darstellung des Phasenwinkels in normierten Größen.

Wir führen nun die folgenden Normierungen ein:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \omega = \omega_0 x, \quad (4)$$

wo ω_0 eine Konstante ist, und

$$y(x) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1} \quad (5)$$

ebenso

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{x}, \quad (6)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \omega_1} = \frac{1}{k}. \quad (7)$$

Das Verhalten von $\operatorname{tg} \varphi$ nach Fig. 1 lässt sich unter Berücksichtigung der Ausdrücke (4) bis (7) wie in Fig. 2 angedeutet, darstellen.

Dabei ist berücksichtigt, daß nach (3)

$$\operatorname{tg}(-\omega) = -\operatorname{tg}(\omega); \quad y(-x) = -y(x)$$

ist.

Wir suchen nun eine rationale Funktion $y(x)$ zu finden, die den aufgestellten geometrischen Forderungen genügt, und werden in einem zweiten Schritt nachweisen, daß sich ein Scheinwiderstand, der aus positiven Schaltelementen besteht, finden läßt, der die gefundene Funktion zum $\operatorname{tg} \varphi$ hat.

Es sei $y(x)$ die gesuchte rationale Funktion. Wir bilden die beiden Ausdrücke:

$$(y - 1) (y + 1) \left(y - \frac{1}{k} \right) \left(y + \frac{1}{k} \right) \quad (a)$$

und

$$(x - 1) (x + 1) \left(x + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2. \quad (b)$$

Beides sind rationale Funktionen in x . An Hand von Fig. 2 verifiziert man, daß beide dieselben Nullstellen haben. Hat $y(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen v -fachen Pol, so hat der Ausdruck (a) an derselben Stelle einen $(4v)$ -fachen Pol. dy/dx hat hingegen an der Stelle $x = x_0$ einen $(v+1)$ -fachen, $(dy/dx)^2$ also einen $[2(v+1)]$ -fachen Pol. Setzen wir $v = 1$, so haben beide Ausdrücke (a) und (b) wegen $4v = 2(v+1)$; $v = 1$ auch dieselben Pole.

Führen wir also die Bedingung ein, daß $y(x)$ nur einfache Pole haben darf und daß (a) nur reelle Nullstellen hat, so unterscheiden sich (a) und (b) nur durch einen konstanten Faktor, und wir dürfen

$$(y^2 - 1) \left(y^2 - \frac{1}{k^2} \right) = C (x^2 - 1) \left(x^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

setzen. Oder mit einem neuen C :

$$(1 - y^2) (1 - k^2 y^2) = C (1 - x^2) (1 - \kappa^2 x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2. \quad (8)$$

Unsere gesuchte Funktion $y(x)$ wäre also unter den rationalen Lösungen der Differentialgleichung (8) zu suchen. Wegen der gemachten Einschränkungen bezüglich Nullstellen und Pole von (a) und (b) haben wir allerdings nicht mehr die allgemeine Lösung des Problems zu erwarten.

Nach der Trennung der Variablen finden wir aus (8):

$$C \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}. \quad (9)$$

Wir führen zwei Hilfsvariablen $u(x)$ und $v(x)$ ein und setzen:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}, \quad (10)$$

$$dv = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}. \quad (11)$$

Aus (9) folgt zudem:

$$du = C dv; \quad u = C v. \quad (12)$$

Die Umkehrfunktion der durch (10) definierten Funktion ist bekanntlich die Jakobische elliptische Funktion Sinus amplitudinis $\text{sn}(u)$, also

$$x = \text{sn}(u | \kappa) \quad (13)$$

und analog ist

$$y = \text{sn}(v | k) = \text{sn}\left(\frac{u}{C} | k\right). \quad (14)$$

An Hand von Fig. 2 verifiziert man folgende Integralbeziehungen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} &= C \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}, \\ \int_1^{1/\kappa} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} &= \varrho C \int_1^{1/k} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}, \\ \int_{1/\kappa}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} &= C \int_{1/k}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}. \end{aligned}$$

Die ganze ungerade Zahl ϱ gibt an, wie oft $y(x)$ im Intervall $1 < x < 1/\kappa$ zwischen den Werten 1 und $1/k$ hin- und herpendelt.

Nach der Einführung der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung $K(\kappa)$ und $K'(\kappa) = K(\kappa')$ wird auch:

$$K(\kappa) = C K(k), \quad (15)$$

$$K'(\kappa) = \varrho C K'(k). \quad (16)$$

Bedeuten m und n zwei beliebige ganze Zahlen, so ist bekanntlich:

$$x = \text{sn}(u | \kappa) = \text{sn}[u + 4m K(\kappa) + j 2n K'(\kappa) | \kappa] \quad (17)$$

und, da $v = u/C$ ist:

$$y = \text{sn}(v | k) = \text{sn}\left(\frac{1}{C}[u + 4m K(k) \cdot C + j 2n K'(k) \cdot C] | k\right).$$

Mit Rücksicht auf (15) und (16):

$$y = \text{sn}\left(\frac{1}{C}[u + 4m K(\kappa) + j 2n \frac{K'(\kappa)}{\varrho}] | k\right) = \text{sn}\left(\frac{u}{C} | k\right). \quad (18)$$

Aus (18) ist ersichtlich, daß $y(u)$ eine elliptische Funktion der Variablen u ist, mit den Perioden $4m K(\kappa)$ und $j 2n K'(\kappa)/\varrho$. Wählen wir in (17) $m = 1, n = 1$; in (18) aber $m = 1, n = \varrho$, so haben sowohl $x = x(u)$ und $y = y(u)$ dieselben Perioden $4 K(\kappa)$ und $j 2 K'(\kappa)$. Nach den allgemeinen Sätzen der Theorie der

elliptischen Funktionen besteht aber zwischen zwei elliptischen Funktionen mit denselben Perioden ein algebraischer Zusammenhang. In unserem Falle sogar ein rationaler, d.h. es ist:

$$y = y(\kappa) = R[\operatorname{sn}(u|\kappa)]. \quad (19)$$

Das Auffinden von $y = y(x)$ ist also ein Teilungsproblem der Funktion $\operatorname{sn}(u|\kappa)$.

Um den Zusammenhang (19) zu finden, betrachten wir:

$$y^2 = \operatorname{sn}^2(v|k) = \operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{C}|k\right). \quad (20)$$

y^2 ist eine *gerade* elliptische Funktion mit den Perioden $4K(\kappa)$ und $j2K'(\kappa)$. Wir zeichnen in Fig. 3 die in einem Periodenparallelogramm gelegenen Nullstellen und Pole auf (für $\varrho = 3$).

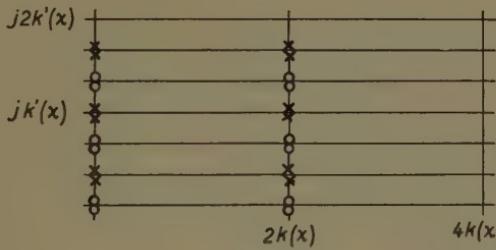


Fig. 3

Periodenparallelogramm der Funktion $\operatorname{sn}^2(v/k)$.
Es bedeuten: \times zweifacher Pol, \circ zweifache Nullstelle.

Die Gleichung $\operatorname{sn}^2(u) - \operatorname{sn}^2(u_0)$ hat im Periodenparallelogramm zwei Lösungen¹⁾: $u = u_0$ und $u = -u_0 + 2K + j2K'$. Daraus folgt aber (vgl. Fig. 3), daß die Funktion

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{\prod_{\nu=1}^{(\varrho-1)/2} \left[\operatorname{sn}^2(u) - \operatorname{sn}^2\left(j \frac{2\nu}{\varrho} K'(\kappa)\right) \right]^2}{\prod_{\nu=1}^{(\varrho-1)/2} \left[\operatorname{sn}^2(u) - \operatorname{sn}^2\left(j \frac{2\nu-1}{\varrho} K'(\kappa)\right) \right]^2}$$

dieselben Nullstellen und Pole hat wie $y^2 = y^2(u)$. Nach dem Satz von LIOUVILLE gilt also mit einer passend gewählten Konstanten A :

$$y(u) = A \operatorname{sn} u \frac{\prod_{\nu=1}^{(\varrho-1)/2} \left\{ \operatorname{sn}^2(u) - \operatorname{sn}^2\left(j \frac{2\nu}{\varrho} K'(\kappa)\right) \right\}}{\prod_{\nu=1}^{(\varrho-1)/2} \left\{ \operatorname{sn}^2(u) - \operatorname{sn}^2\left(j \frac{2\nu-1}{\varrho} K'(\kappa)\right) \right\}}. \quad (21)$$

¹⁾ Vgl. HALPHEN, *Traité des Fonctions elliptiques*, 1. Teil, S. 48.

Da nun $\operatorname{sn}(j u | \kappa) = j \operatorname{sn}(u | \kappa') / \operatorname{cn}(u | \kappa') \equiv j \operatorname{sc}(u | \kappa')$ ist, wird mit Rücksicht auf $x = \operatorname{sn}(u | \kappa)$:

$$y(x) = A x \prod_{\nu=1}^{(\varrho-1)/2} \frac{\left\{ x^2 + \operatorname{sc}^2 \left(\frac{2 \nu}{\varrho} K(\kappa') \mid \kappa' \right) \right\}}{\left\{ x^2 + \operatorname{sc}^2 \left(\frac{2 \nu - 1}{\varrho} K(\kappa') \mid \kappa' \right) \right\}}. \quad (22)$$

Das ist aber der gesuchte rationale Zusammenhang zwischen y und x . Die Konstante A bestimmt sich am einfachsten aus der Bedingung

$$y(1) = 1. \quad (23)$$

Wir wollen nun nachweisen, daß es gelingt, Scheinwiderstände zu realisieren, die der Funktion (22) genügen.

Nach (5) ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 y(\kappa) = H y(x) \quad (24)$$

mit $\operatorname{tg} \varphi_1 = H$. Nach (1) und (2) ist:

$$G + U = g(-j \omega) f(j \omega). \quad (25)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir zunächst $\omega_0 = 1$ setzen, also ist:

$$G(x) + U(x) = g(-j x) f(j x). \quad (26)$$

Wir denken uns das Polynom $G + U$ in Faktoren zerlegt. Unser Problem ist lösbar, wenn es gelingt, diese Faktoren so zu ordnen, daß sich aus ihnen zwei Polynome $g(-j x)$ und $f(+j x)$ bilden lassen, derart, daß

$$\mathfrak{Z}(j x) = \frac{f(j x)}{g(j x)}$$

ein mit passiven Schaltelementen realisierbarer Scheinwiderstand wird.

Zur Faktorenzerlegung haben wir die Wurzeln der Gleichung

$$G(j x) + U(j x) = 0 \quad (27)$$

zu bestimmen. Da G und U teilerfremd sind, hat die Gleichung

$$1 + \frac{U(j x)}{G(j x)} = 1 - j \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (28)$$

dieselben Wurzeln wie (27). Mit (24) schreibt sich (28) als

$$1 - j H y(x) = 0. \quad (29)$$

Nach (14) ist aber $y = \operatorname{sn}(v | k)$, also

$$1 - j H \operatorname{sn}(v | k) = 0, \quad \operatorname{sn}(v | k) = j \frac{1}{H}. \quad (30)$$

Es sei $v = v_0$ eine Lösung von (30), dann ist die Gesamtheit aller Lösungen gegeben durch

$$v = \begin{cases} v_0 + 4mK + 2njk' \\ 2K - v_0 + 4mK + 2njk' \end{cases}. \quad (31)$$

Für $jv < v < jK'$ nimmt $\operatorname{sn}(v|k)$ von Null an monoton wachsend alle positiven rein imaginären Werte einmal an. Für ein bestimmtes $v = ja_0; 0 < a_0 < K'$ wird deshalb die Gleichung (30) erfüllt sein. Nun ist nach (12) $u = C v$, womit sich unter Berücksichtigung von (15) und (16) der Zusammenhang (31) schreibt:

$$v = \begin{cases} Cv_0 + 4mK(\kappa) + j2n\frac{K'(\kappa)}{\varrho} \\ 2K(\kappa) - Cv_0 + 4mK(\kappa) + j2n\frac{K'(\kappa)}{\varrho} \end{cases} \quad (32)$$

Mit $0 < Cv_0 < K'(\kappa)/\varrho$. Setzen wir nun die Werte (32) in $x = \operatorname{sn}(u/\kappa)$ ein, so finden wir die x -Werte, die die Gleichung (29) lösen.

Es ist aber

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn}(u) \\ \operatorname{sn}(-u - 2K) = \operatorname{sn}(-u - 2K + 4K) = \operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn}(u) \end{array} \right\}. \quad (33)$$

Wir dürfen uns also auf die u -Werte der ersten Zeile von (32) beschränken. Ebenso dürfen wir $m = 0$ setzen. Von den verbleibenden u -Werten

$$u = ja_0 + j2n\frac{K'(\kappa)}{\varrho}, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (34)$$

fallen ϱ verschiedene in das Intervall $0 < u < j2K'$. Sie entsprechen den Lösungen von (29). Wir ordnen diese u -Werte in zwei Gruppen. Die erste Gruppe enthält alle Werte für die $0 < u < jK'$; die zweite Gruppe alle diejenigen für die $jK' < u < 2jK'$ ist.

Es sind dies:

$$\begin{aligned} 1. \quad u_0 &= ja_0 & 2. \quad u_{\varrho-2} &= ja_0 + (\varrho+1)\frac{K'}{\varrho} \\ u_2 &= ja_0 + \frac{2K'}{\varrho} & \vdots & \vdots \\ u_4 &= ja_0 + \frac{4K'}{\varrho} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{\varrho-1} &= ja_0 + (\varrho-1)\frac{K'}{\varrho} & u_1 &= ja_0 + (\varrho+\varrho-2)\frac{K'}{\varrho}. \end{aligned} \quad (35) \quad (36)$$

Die Werte der zweiten Gruppe sind von unten nach oben gezählt kongruent zu den Werten

$$\begin{aligned} U_1 &= -j \frac{2 K'}{\varrho} + j C a_0 \\ U_3 &= -j \frac{4 K'}{\varrho} + j C a_0 \\ \dots & \dots \\ U_{\varrho-2} &= -j (\varrho-1) \frac{K'}{\varrho} + j C a_0. \end{aligned} \quad (37)$$

Da nun $C a_0 < K'/\varrho$ ist, sind alle U in (37) negativ imaginär, ihr sn also ebenfalls negativ imaginär. Daraus folgt:

Von den ϱ Lösungen der Gleichung (29) sind $(\varrho+1)/2$ positiv imaginär, $(\varrho-1)/2$ negativ imaginär. Zudem ist, wegen

$$|u_0| < |u_1| < |u_2| < \dots < |u_\varrho|, \quad |x_0| < |x_1| < \dots < |x_\varrho|, \quad (38)$$

wo

$$j x_0 = \text{sn}(u_0); \quad j x_1 = \text{sn}(u_1) \text{ usw.}$$

Die positiv imaginären Lösungen ordnen wir nun dem Polynom $f(j x)$, die negativ imaginären hingegen $g(-j x)$ zu.

Damit schreibt sich die Zerlegung (26) mit einer passend gewählten Konstanten A_1 :

$$\begin{aligned} f(j x) g(-j x) &= A_1 \{(x - j x_0) (x - j x_2) \dots (x - j x_{\varrho-1})\} \\ &\quad \times \{(x + j x_1) (x + j x_3) \dots (x + j x_{\varrho-2})\} \end{aligned}$$

oder mit einer neuen Konstanten A'_1 :

$$\begin{aligned} f(j x) g(-j x) &= A'_1 \{(x_0 + j x) (x_2 + j x) \dots (x_{\varrho-1} + j x)\} \\ &\quad \times \{(x_1 - j x) (x_3 - j x) \dots (x_{\varrho-2} - j x)\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Daraus folgt schließlich für den gesuchten Scheinwiderstand:

$$\mathfrak{Z}(j x) = A'_1 \frac{(x_0 + j x) (x_2 + j x) \dots (x_{\varrho-1} + j x)}{(x_1 + j x) (x_3 + j x) \dots (x_{\varrho-2} + j x)}. \quad (40)$$

Die Zerlegung (26) ist eindeutig, der Scheinwiderstand (40) ist also bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt. Wegen der Beziehung (38) lässt sich (40) bekanntlich durch eine Schaltung, die entweder nur Widerstände und Induktivitäten oder nur Widerstände und Kapazitäten enthält, realisieren.

Ein für mancherlei Anwendungen interessantes Beispiel sei numerisch behandelt. Es sei ein Scheinleitwert zu bestimmen, für den

$$y(x) = A \operatorname{J} x \frac{x^2 + b_0^2}{x^2 + b_1^2}. \quad (41)$$

ist (daraus folgt $\varrho = 3$), zudem sei $\varkappa = 0,1$; $\operatorname{tg} \varphi_0 = 1$, $\varphi_0 = 45^\circ$ vorzuschreiben. Aus den Beziehungen (15) und (16) folgt:

$$\frac{K(\varkappa)}{K'(\varkappa)} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{K(k)}{K'(k)}; \quad \frac{K(k)}{K'(k)} = \varrho \frac{K(\varkappa)}{K'(\varkappa)} \quad (42)$$

und

$$C = \frac{K(\varkappa)}{K(k)}. \quad (43)$$

In den Tafeln über die vollständigen elliptischen Integrale von HAYASHI findet sich das Verhältnis K/K' tabelliert. Für $\varkappa = 0,1$; $\varkappa^2 = 0,01$ finden wir:

$$\frac{K(\varkappa)}{K'(\varkappa)} = 0,426109.$$

Daraus

$$\frac{K(k)}{K'(k)} = \varrho \cdot 0,426109 = 1,278327.$$

Dazu gehört ein K^2 , das sich aus derselben Tafel entnehmen lässt, von

$$k^2 = 0,749,$$

$$k = 0,8654.$$

Der $\operatorname{tg} \varphi$ variiert also für $1 < x < 1/\varkappa$; $1 < x < 10$ im Verhältnis 1:1/0,8654.

Nach (22) ist:

$$y(x) = A x \frac{x^2 + sc^2 \left(\frac{2 K(\varkappa')}{3} \mid \varkappa' \right)}{x^2 - sc^2 \left(\frac{K(\varkappa')}{3} \mid \varkappa' \right)}$$

mit $\varkappa'^2 = 0,99$ wird:

$$K(\varkappa') = 3,69564,$$

$$\frac{K}{3} = 1,23188,$$

$$\frac{2 K}{3} = 2,46376.$$

Aus den Tafeln von MILNE-THOMSON finden wir (mit linearer Interpolation)

$$sc(1,23188 \mid 0,99) = \frac{0,84436}{0,53574} = 1,57$$

und

$$sc(2,46376 \mid 0,99) = 6,36.$$

Damit wird

$$y(x) = A \ x \frac{x^2 + 40,5}{x^2 + 2,46} \quad \text{mit} \quad A = \frac{3,46}{41,5}.$$

Wir lösen die Gleichung (29) direkt:

$$1 - j H \ y(x) = 0; \quad H = 1,$$

also

$$1 - j \frac{3,46}{41,5} x \frac{x^2 + 40,5}{x^2 + 2,46} = 0. \quad (44)$$

Wir setzen $j x = Z$ und finden aus (44):

$$Z_0 = 0,574,$$

$$Z_2 = 14,64,$$

$$Z_1 = -3,214. \quad (45)$$

Damit wird der gesuchte Scheinleitwert bis auf eine Konstante:

$$\eta(j x) = \frac{(0,574 + j x)(14,64 + j x)}{(3,214 + j x)}. \quad (46)$$

Eine Partialbruchzerlegung von (46) führt auf das nachfolgende Schaltschema Fig. 4 (mit normierten Schaltelementen).

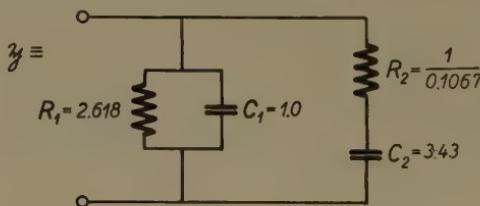


Fig. 4
Schaltschema in normierten Größen zum Beispiel (41).

Résumé

L'auteur examine une manière particulière de réaliser des impédances dont l'angle de déphasage est prescrit en fonction de la fréquence. La méthode appliquée est très semblable à celle qu'emploie CAUER dans sa théorie des filtres. Après avoir résolu un problème de division des fonctions elliptiques, on arrive à établir l'expression mathématique de l'impédance.

Des applications sont possibles, par exemple, dans le domaine des amplificateurs à contre-réaction.

(Eingegangen: 24. 6. 49.)

Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung

Von FRITZ STÜSSI, ETH., Zürich

1. Einleitung

Das Seilpolygon ist ein klassisches Hilfsmittel der Baustatik, dessen Einführung auf SIMON STEVIN (1548–1620) von Brügge und den Franzosen VARIGNON (1654–1722) zurückgeht. Es diente ursprünglich zum Zusammensetzen von Kräften in der Ebene zu einer Resultierenden.

Eine vielseitige Verwendung des Seilpolygons verdanken wir KARL CULMANN (1821–1881), der damit statische Momente und Momente höherer Ordnung bestimmte. Durch seine Analogie der elastischen Linie zu einer Momentenfläche dehnte OTTO MOHR (1835–1918) den Anwendungsbereich des Seilpolygons weiter aus.

Alle diese klassischen Anwendungen des Seilpolygons sind *graphische* Anwendungen mit dem Vorzug der Anschaulichkeit, aber auch mit dem Nachteil der beschränkten numerischen Genauigkeit. Diesen Nachteil können wir vermeiden, indem wir die graphische Konstruktion des Seilpolygons mit Hilfe der *Seilpolygongleichung* in die Sprache der Zahlenrechnung übersetzen. Durch diese Übersetzung ergibt sich, wie nachstehend gezeigt werden soll, auch eine wesentliche Erweiterung des Anwendungsbereichs, nämlich die numerische Lösung bestimmter Gruppen von Differentialgleichungen bzw. von Randwertproblemen.

Es liegt wohl in der Natur der Sache, wenn bei einer solchen Darstellung der Seilpolygongleichung und ihrer Anwendungen von baustatischen Begriffen und Zusammenhängen ausgegangen wird. Ich bin aber überzeugt, daß das abzuleitende numerische Berechnungsverfahren auch in anderen Gebieten der angewandten Mathematik gute Dienste leisten kann.

2. Die Seilpolygongleichung und ihre Bedeutung

Zur Aufstellung der Seilpolygongleichung gehen wir aus von der Momentenfläche M eines durch lotrechte Einzellasten P belasteten Balkens, die ja bekanntlich durch das Seilpolygon zu den Belastungen dargestellt wird.

Wir greifen ein Balkenfeld, d.h. einen Abschnitt zwischen zwei Knotenpunkten $m - 1$ und m heraus, wobei wir die Lastangriffspunkte mit den

Knotenpunkten zusammenfallen lassen bzw. unmittelbar links von diesen annehmen. Am Feld $m - 1$ bis m können wir nach Fig. 1 die folgenden zwei Gleichgewichtsbedingungen anschreiben:

$$M_m = M_{m-1} + Q_m \Delta x_m, \quad (1a)$$

$$Q_m - Q_{m+1} = P_m. \quad (1b)$$

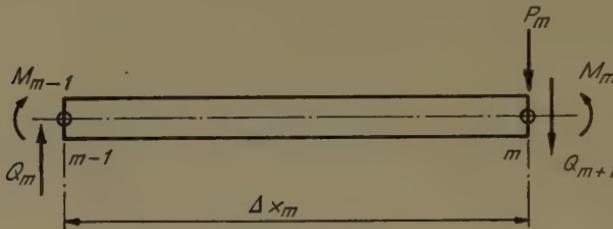


Fig. 1

Dabei bedeutet die Querkraft Q die Resultierende aller Lasten des Balkens links oder rechts vom betrachteten Knotenpunkt. Innerhalb eines Feldes ist bei unseren Voraussetzungen die Querkraft konstant.

Für das Nachbarfeld Δx_{m+1} lässt sich in Analogie zu (1a) die Gleichung

$$M_{m+1} = M_m + Q_{m+1} \Delta x_{m+1}$$

anschreiben; aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir die Querkraft mit Hilfe der Gleichung (1b):

$$\frac{M_m - M_{m+1}}{\Delta x_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{\Delta x_{m+1}} = P_m. \quad (2)$$

Für konstante Feldweiten, $\Delta x_m = \Delta x_{m+1} = \Delta x$, auf die wir uns hier beschränken können, ergibt sich die etwas einfachere Form

$$\underline{-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = P_m \Delta x.} \quad (3)$$

Dies ist die Seilpolygongleichung.

Wirkt an Stelle der Einzellasten P eine stetig verteilte Belastung p , so haben wir diese zu «Knotenlasten» zusammenzufassen. Dabei setzen wir voraus, daß die Belastung p durch «sekundäre Träger» Δx auf die Knotenpunkte übertragen wird; die Knotenlasten sind also als Auflagerkräfte dieser sekundären Träger zu berechnen.

Nehmen wir linearen Verlauf der Belastung an (Fig. 2), so liegt die Resultierende

$$R_m = \frac{p_{m-1} + p_m}{2} \Delta x$$

des Feldes m im Abstand

$$\xi_m = \frac{p_{m-1} + 2p_m + p_{m+1}}{p_{m-1} + p_m} \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

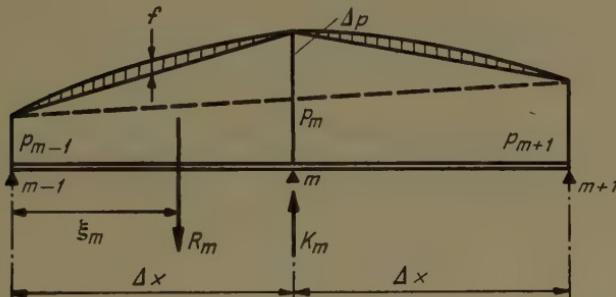


Fig. 2

vom linken Knotenpunkt $m - 1$, und die zugehörige Knotenlast in m beträgt

$$K_{m_1} = R_m \frac{\xi_m}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{6} (p_{m-1} + 2p_m). \quad (4)$$

Ist auch das rechts von m liegende Feld belastet, so ist die vollständige Knotenlast

$$K_m = \frac{\Delta x}{6} (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}). \quad (5)$$

Wegen des je über Feldweite linear vorausgesetzten Verlaufs von p nennen wir diese Gleichung die Trapezformel der Knotenlast.

Eine bessere Annäherung an einen stetigen Verlauf der Belastung p erhalten wir durch die Annahme eines parabelförmigen Verlaufs von p über die zwei Felder von $m - 1$ bis $m + 1$. Diese Parabel ist charakterisiert durch die Pfeilhöhe

$$\Delta p = p_m - \frac{p_{m-1} + p_{m+1}}{2},$$

so daß die Pfeilhöhe f der beiden schraffierten Zwickel mit

$$f = \frac{\Delta p}{4}$$

gegeben ist. Die Resultierende ΔR eines solchen Zwickels,

$$\Delta R = \frac{2}{3} f \Delta x = \frac{\Delta x}{12} (2p_m - p_{m-1} - p_{m+1}),$$

verteilt sich je zur Hälfte auf die beiden benachbarten Knotenpunkte; für den Knotenpunkt m beträgt somit die ganze Knotenlast

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} (\dot{p}_{m-1} + 10 \dot{p}_m + \dot{p}_{m+1}). \quad (6)$$

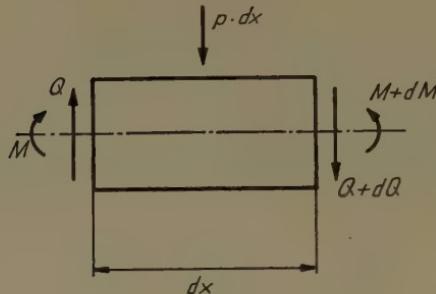


Fig. 3

Diesen Ausdruck nennen wir die Parabelform der Knotenlast. Zur Formulierung von Randbedingungen werden wir auch etwa die Knotenlast K_{m-1} benötigen; sie beträgt nach der Trapezformel

$$K_{m-1} = \frac{\Delta x}{6} (2 \dot{p}_{m-1} + \dot{p}_m) \quad (7a)$$

und nach der Parabelformel

$$K_{m-1} = \frac{\Delta x}{24} (7 \dot{p}_{m-1} + 6 \dot{p}_m - \dot{p}_{m+1}). \quad (7b)$$

Mit den Werten für die Knotenlasten K_m ist somit auch die Seilpolygongleichung für verteilte Belastung gegeben; für stetige Belastung lautet sie beispielsweise mit der Parabelformel

$$-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} (\dot{p}_{m-1} + 10 \dot{p}_m + \dot{p}_{m+1}). \quad (8)$$

Um die mathematische Bedeutung der Seilpolygongleichung zu erkennen, betrachten wir den Gleichgewichtszustand eines kleinen Balkenelementes dx (Fig. 3).

Aus einer Komponentengleichgewichtsbedingung erhalten wir

$$dQ + \dot{p} dx = 0$$

oder

$$\frac{dQ}{dx} = -\dot{p}, \quad (9a)$$

während eine Momentengleichgewichtsbedingung

$$dM - Q \, dx - \frac{\rho \, dx^2}{2} = 0$$

uns unter Vernachlässigung des Gliedes $\rho \, dx^2/2$, das von höherer Kleinheit ist, die Beziehung

$$\underline{\frac{dM}{dx} = Q} \quad (9b)$$

liefert. Die Vereinigung der beiden Gleichungen (9a) und (9b) gibt uns die Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$\underline{\frac{d^2M}{dx^2} = M'' = -\rho}. \quad (10)$$

Die Differentialgleichung (10) hat offensichtlich den gleichen Inhalt wie die Seilpolygongleichung (8), denn beide stellen uns ja den gleichen Zusammenhang zwischen den Biegungsmomenten und den Belastungen eines Balkens dar. Allerdings unterscheiden sich die beiden Darstellungen in zwei Punkten grundsätzlich voneinander:

Die Differentialgleichung $M'' = -\rho$ bezieht sich auf stetige Funktionen und erfaßt deren Verlauf im ganzen Funktionsbereich. Das Moment M wird durch zweimalige Integration von ρ über die Querkraft $Q = M'$ bestimmt; alle Funktionen M, M', M'' sind gleichwertig.

Die Seilpolygongleichung

$$-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = \Delta x K_m(\rho)$$

dagegen erfaßt die Funktion M nur durch ihre Einzelwerte in den Knotenpunkten, und die Belastung ρ tritt nur durch ihre Knotenlasten in die Rechnung ein; dadurch sind auch unstetige Belastungen, wie beispielsweise Einzellasten oder plötzlich veränderliche Belastungen, erfaßbar.

Aus den Knotenlasten ergeben sich die Momente direkt (durch Auflösen des dreigliedrigen Gleichungssystems), ohne daß die Querkräfte Q in Erscheinung treten: die Querkräfte $Q = M'$ werden ausgesprochen zu einer Nebenfunktion und können nur indirekt durch die Hauptfunktionen M und $\rho = -M''$ ausgedrückt werden. Dies äußert sich dann, wenn wir die Nebenfunktion brauchen, dadurch, daß die entsprechenden Ausdrücke sich weniger einfach (oder weniger genau) ausdrücken lassen als die Werte der Hauptfunktionen M und ρ .

Unter Beachtung dieser Besonderheiten stellt uns die Seilpolygongleichung somit den Zusammenhang zwischen einer Funktion M und ihrer zweiten Ab-

leitung $M'' = -\rho$ dar. Dieser Zusammenhang gilt allgemein, nicht nur für Biegunsmomente, und wir können somit die Seilpolygongleichung für jede Funktion y anschreiben:

$$y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = \Delta x K_m(y''). \quad (11a)$$

In dieser Form ist die Seilpolygongleichung streng gültig. Ist beispielsweise die Funktion y'' stetig, so können wir die Knotenlast $K_m(y'')$ durch die Parabelformel ausdrücken und erhalten

$$y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} (y''_{m-1} + 10y''_m + y''_{m+1}). \quad (11b)$$

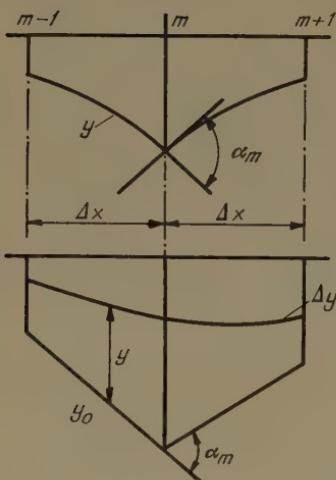


Fig. 4

Da wir bei den hier vorkommenden Anwendungen den Verlauf der Funktion y'' oder irgendeiner Funktion y , deren Knotenlast wir bestimmen müssen, ihrem grundsätzlichen Verlauf nach immer kennen, können wir auch die Größe der Knotenlast mit genügender Genauigkeit angeben. Weist beispielsweise diese Funktion y an der Stelle m einen Knick α_m auf (Fig. 4), so können wir die Knotenlast durch Zerlegung in ein Trapez (y_0) und eine Parabel (Δy) bestimmen:

$$K_m(y_0) = \frac{\Delta x}{6} (y_{0,m-1} + 4y_{0,m} + y_{0,m+1}),$$

$$K_m(\Delta y) = \frac{\Delta x}{12} (\Delta y_{m-1} + 10\Delta y_m + \Delta y_{m+1});$$

mit

$$\alpha_m \Delta x = -y_{0,m-1} + 2y_{0,m} - y_{0,m+1}$$

erhalten wir

$$K_m(y) = K_m(y_0) - K_m(\Delta y) = \frac{\Delta x}{12} (y_{m-1} + 10y_m + y_{m+1}) - \frac{\Delta x^2}{12} \alpha_m. \quad (12)$$

In analoger Weise können auch andere Unstetigkeiten, wie etwa sprunghafte Änderungen, in der Knotenlast berücksichtigt werden.

Die Seilpolygongleichung (11a) besitzt eine unverkennbare Ähnlichkeit mit dem beim Rechnen mit endlichen Differenzen verwendeten zweiten Differenzenquotienten

$$y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = \Delta x^2 y''_m; \quad (13)$$

der Unterschied zwischen den beiden Beziehungen ist jedoch ein grundsätzlicher: der Differenzenquotient (13) ist einfach aus einer Vergrößerung des zweiten Differentialquotienten entstanden, wobei die bei unendlich kleinen Intervallen zulässige Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung mit übernommen wurde, obwohl sie bei endlichen Intervallen nicht mehr zulässig ist. Davon röhrt offensichtlich die oft festgestellte ungenügende Genauigkeit der Differenzenrechnung her. Bei der Seilpolygongleichung dagegen, die einen baustatischen Zusammenhang darstellt und die in der Form der Gleichung (11) streng gültig ist, erscheinen gerade diese unzulässigen Vernachlässigungen vermieden. Da aber bei jeder numerischen Berechnungsmethode ihre numerische Genauigkeit entscheidend wichtig ist, erscheint für das praktische Rechnen die Seilpolygongleichung der Differenzengleichung (13) überlegen.

3. Die Nebenfunktion y'

Wir benötigen bei unserer Aufgabe, der numerischen Lösung von Randwertproblemen, die Nebenfunktion y' aus zwei Gründen: einmal müssen wir eine Randbedingung $y'_A = b_A$ ausdrücken und andererseits müssen wir eine in der zu lösenden Differentialgleichung vorkommende Nebenfunktion y' durch ihre Knotenlast erfassen können.

Es zeigt sich nun, daß die Erfassung der Nebenfunktion y' mit den Trapezformeln wesentlich einfacher ist als mit den Parabelformeln; wir beschränken uns deshalb hier auf diese. Die etwas geringere Genauigkeit der Trapezformeln gegenüber den Parabelformeln können wir bei der praktischen Anwendung durch die Wahl von etwas kleineren Intervallen kompensieren.

Die Neigung y'_m der Funktion y im Knotenpunkt m läßt sich aus der Sehnenneigung y'_S und der Knotenlast $\Delta y'$ zusammensetzen (Fig. 5):

$$\begin{aligned} y'_{m-1} \Delta x &= y_m - y_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{6} (2 y''_{m-1} + y''_m), \\ y'_m \Delta x &= y_m - y_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{6} (y''_{m-1} + 2 y''_m). \end{aligned} \quad (14a)$$

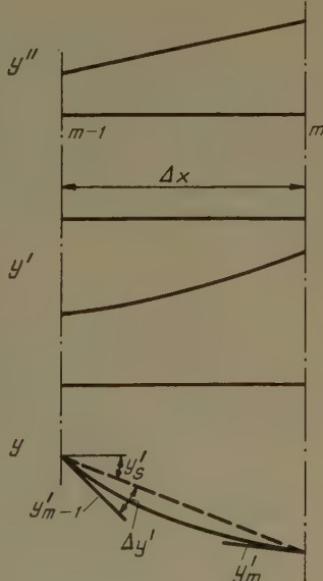


Fig. 5

Da wir für das nächste Feld die analogen Beziehungen anschreiben können, ergibt sich einerseits für y'_m als Mittelwert auch

die Beziehung

$$y'_m \Delta x = \frac{1}{2} (y_{m+1} - y_{m-1}) - \frac{\Delta x^2}{12} (y''_{m+1} - y''_{m-1}), \quad (15)$$

während wir andererseits die Knotenlast mit der Trapezformel zu

$$\underline{K_m(y')} = \frac{\Delta x}{6} (y'_{m-1} + 4 y'_m + y'_{m+1}) = \underline{\frac{1}{2} (y_{m+1} - y_{m-1})} \quad (16a)$$

finden.

Mit Verwendung der Parabelformeln würden wir erhalten:

$$\begin{aligned} y'_{m-1} \Delta x &= y_m - y_{m-1} - \frac{\Delta x^2}{24} (7 y''_{m-1} + 6 y''_m - y''_{m+1}) \\ y_m \Delta x &= y_m - y_{m-1} + \frac{\Delta x^2}{24} (3 y''_{m-1} + 10 y''_m - y''_{m+1}). \end{aligned} \quad (14b)$$

Der Mittelwert für y'_m aus zwei benachbarten Feldern ergibt sich genau gleich groß wie in Gleichung (15) mit der Trapezformel; die numerische Genauigkeit dieses Ausdrucks (15) ist deshalb wohl sehr gut; Gleichung (15) dient zur Bestimmung der Nebenfunktion y' aus den Hauptfunktionen y und y'' .

Die nach der Parabelformel mit den Werten nach Gleichung (14b) berechnete Knotenlast $K_m(y')$ wird

$$K_m(y') = \frac{1}{2} (y_{m+1} - y_{m-1}) - \frac{\Delta x^2}{24} (y''_{m+1} - y''_{m-1}). \quad (16b)$$

Bei der praktischen Anwendung zeigt es sich, daß Gleichung (16b) viel weniger einfach zu handhaben ist als die einfachere Gleichung (16a); wir werden uns deshalb hier, wie schon gesagt, auf die Verwendung von Gleichung (16a) beschränken.

4. Die Lösung der totalen Differentialgleichung zweiter Ordnung

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die totale Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\underline{y'' + b y' + c y + F(x) = 0} \quad (17a)$$

mit Hilfe der Seilpolygongleichung numerisch zu lösen. Dabei handelt es sich darum, die Unbekannten y'' und y' durch y auszudrücken und so zu eliminieren, um ein Gleichungssystem zu erhalten, das neben den Werten der Störungsfunktion F nur noch Unbekannte y enthält. Wir unterscheiden zwischen der Grundgleichung, die für jeden Zwischenknotenpunkt anzuschreiben ist, und den Randbedingungen.

a) Die Grundgleichung

Nach den Bemerkungen, mit denen wir den Unterschied zwischen Differentialgleichung (10) und Seilpolygongleichung (8) charakterisiert haben, gehen wir von der zu lösenden Differentialgleichung (17a) über auf die entsprechende Gleichung zwischen Δx -fachen Knotenlasten:

$$\Delta x K_m(y'') + \Delta x K_m(b y') + \Delta x K_m(c y) + \Delta x K_m(F) = 0. \quad (18)$$

Nach Gleichung (11a) ist

$$\Delta x K_m(y'') = y_{m-1} - 2 y_m + y_{m+1}.$$

Die Funktion $c y$ wird normalerweise stetig sein; wir setzen somit nach der Parabelformel

$$\Delta x K_m(c y) = \frac{\Delta x^2}{12} (c_{m-1} y_{m-1} + 10 c_m y_m + c_{m+1} y_{m+1});$$

mit der Abkürzung

$$\gamma = \frac{c \Delta x^2}{12}$$

wird

$$\Delta x K_m(c y) = \gamma_{m-1} y_{m-1} + 10 \gamma_m y_m + \gamma_{m+1} y_{m+1}.$$

Die Funktion y' können wir aus den angegebenen Gründen in einfacher Weise nur mit der Trapezformel erfassen; auch müssen wir hier im Bereich von $m-1$ bis $m+1$ den Koeffizienten b als konstant voraussetzen. Damit wird nach Gleichung (16a)

$$\Delta x K_m(b y') = \frac{\Delta x b_m}{2} (y_{m+1} - y_{m-1});$$

mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{\Delta x b}{2}$$

erhalten wir

$$\Delta x K_m(b y') = \beta_m (y_{m+1} - y_{m-1}).$$

Da bei praktischen Anwendungen das Glied $b y'$ der Gleichung (17a) in der Regel nur von untergeordneter Bedeutung ist, hat seine nur angenäherte Erfassung auch bei ziemlich großen Intervallen Δx keinen wesentlichen Fehler zur Folge.

Setzen wir diese Werte der Δx -fachen Knotenlasten in die Gleichung (18) ein, so ergibt sich nach Ordnen die gesuchte Grundgleichung zu

$$-\gamma_{m-1} (1 - \beta_m + \gamma_{m+1}) + y_m (2 - 10 \gamma_m) - y_{m+1} (1 + \beta_m + \gamma_{m+1}) = \Delta x K_m(F). \quad (19)$$

Enthält die Belastungsfunktion F eine Einzellast, so wird die Funktion y einen Knick α aufweisen; in solchen Fällen ist die Knotenlast von y entweder nach der Trapezformel (5) oder genauer nach Gleichung (12) einzusetzen.

Ein negatives Vorzeichen der Koeffizienten b und c kann ohne weiteres in der Grundgleichung durch entsprechenden Vorzeichenwechsel der Werte β und y berücksichtigt werden. Die Koeffizienten können auch veränderlich sein. Damit erlaubt die Grundgleichung die numerische Lösung der Differentialgleichung (17a) nicht nur unter speziellen oder einschränkenden Voraussetzungen, sondern sie erfaßt wohl alle vorkommenden Anwendungen, indem die gesuchte Funktion unter Beachtung der Randbedingungen durch Auflösung des dreigliedrigen Gleichungssystems (19) numerisch berechnet wird.

b) Die Randbedingungen

Durch die Randbedingungen können an einem Ende A eine oder zwei der drei Größen y_A , y'_A , y''_A vorgeschrieben sein.

Ist y_A gegeben, so ersetzt uns diese Aussage eine Gleichung für den Randpunkt; wir brauchen diesen Fall deshalb nicht weiter zu untersuchen.

Wir untersuchen den weniger einfachen Fall « y'_A gegeben» mit den Trapezformeln. Nach Gleichung (14a) ist

$$y'_A \Delta x = y_1 - y_A - \frac{\Delta x^2}{6} (2 y''_A + y''_1);$$

im letzten Glied eliminieren wir y'' mit Hilfe der Differentialgleichung (17a):

$$\frac{\Delta x^2}{6} (2 y''_A + y''_1) = -\frac{\Delta x^2}{6} (2 b y'_A + b y'_1 + 2 c y_A + c y_1 + 2 F_A + F_1).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (14a) und (14b) ersetzen wir darin die Werte y' :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^2}{6} b (2 y'_A + y'_1) &= \frac{\Delta x^2 b}{6} \left[3 y_1 - 3 y_A - \frac{\Delta x^2}{6} (4 y''_A + 2 y''_1 - y''_A - 2 y''_1) \right] \\ &= \beta (y_1 - y_A - \frac{\Delta x^2}{6} y''_A). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Ordnen finden wir die gesuchte Randbedingung zu

$$\underline{y_A (1 + \beta - 4 \gamma) - y_1 (1 + \beta + 2 \gamma) = - y'_A \Delta x - \frac{\Delta x^2}{6} \beta y''_A + \frac{\Delta x^2}{6} (2 F_A + F_1)}. \quad (20a)$$

Es wäre nun noch y''_A zu eliminieren, was mit Gleichung (17a) leicht möglich ist. In dieser Form bietet Gleichung (20a) aber auch die Möglichkeit,

y'_A zu eliminieren, so daß sie die Randbedingung « y''_A gegeben» ausdrücken kann. Die Elimination wird im einen wie im andern Fall am besten numerisch durchgeführt.

Für die unvollständige Differentialgleichung

$$y'' + c y + F(x) = 0 \quad (17b)$$

kann die Randbedingung « y'_A gegeben» auch auf einfache Weise und etwas genauer durch die Parabelformel, Gleichung (14b), ausgedrückt werden:

$$y'_A \Delta x = y_1 - y_A - \frac{\Delta x^2}{24} (7 y''_A + 6 y''_1 - y''_2);$$

eliminieren wir hierin die Werte y'' mit der Gleichung (17b), so erhalten wir nach Ordnen

$$y_A (2 - 7 \gamma) - y_1 (2 + 6 \gamma) + y_2 \gamma = -2 y'_A \Delta x + \frac{\Delta x^2}{12} (7 F_A + 6 F_1 - F_2). \quad (20b)$$

Für den Sonderfall $y'_A = 0$ kann, falls auch $F'_A = 0$, die Randbedingung auch mit der Grundgleichung (19) als Symmetriebedingung ausgedrückt werden:

$$y_A (1 - 5 \gamma) - y_1 (1 + \gamma) = \frac{\Delta x^2}{12} (5 F_A + F_1). \quad (20c)$$

5. Anwendungsformen und Beispiele

Zur Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung müssen zwei Randbedingungen vorgeschrieben sein. Diese können entweder beide an der gleichen Stelle, am Anfang des Funktionsbereiches, oder an zwei verschiedenen Stellen, je eine an den beiden Enden des Bereiches, gegeben sein. Der erste Fall kommt in der Regel bei Schwingungsgleichungen vor, bei denen als Anfangsbedingungen zwei der drei Größen Auslenkung y_A , Geschwindigkeit y'_A , Beschleunigung y''_A , gegeben sind, während die zweite Form bei Formänderungsproblemen von Stäben die Regel ist, wo die Lagerungsart an den beiden Stabenden die Randbedingungen liefert. Diese beiden Gruppen verlangen verschiedene Anwendungsformen der Grundgleichung (19) und sollen deshalb auch getrennt betrachtet werden. Endlich soll noch kurz auf das Problem der Stabilität hingewiesen werden.

a) Schwingungsgleichungen

Hier stellt die Differentialgleichung (17a) die gedämpfte erzwungene Schwin-

gung dar, bei der zwei Anfangsbedingungen y_A und y'_A (oder auch y''_A), wenn wir mit

$$y'_A = \left(\frac{dy}{dt} \right)_A$$

bezeichnen, gegeben sind. Aus diesen beiden Anfangsbedingungen und mit der Randbedingung Gleichung (20a) sind die beiden Schwingungsausschläge y_A und y_1 zu bestimmen, wobei wir selbstverständlich die Intervalle Δx durch das Zeitintervall Δt zu ersetzen haben. Die Grundgleichung (19) schreiben wir hier in der Form

$$\underline{y_{m+1} = \frac{1}{1+\beta+\gamma} \left\{ y_m (2 - 10\gamma) - y_{m-1} (1 - \beta + \gamma) - \frac{\Delta t^2}{12} (F_{m-1} + 10F_m + F_{m+1}) \right\}}; \quad (21)$$

aus y_A und y_1 ist somit y_2 bestimmt usw., und die Schwingungskurve kann Punkt für Punkt berechnet werden. Dabei kann auch die Intervallgröße im Verlauf der Berechnung gewechselt werden (unter entsprechender Änderung der Werte β und γ), wobei ein Zahlenvergleich der für verschiedene Intervallwerte Δt erhaltenen Kurvenwerte y eine einfache Beurteilung der bei bestimmter erforderlicher Genauigkeit noch zulässigen Intervallgröße erlaubt. So ist es beispielsweise angezeigt, am Anfang der Schwingung mit kleinen Intervallen zu beginnen, weil die Randbedingung (20a) mit der etwas weniger genauen Trapezformel abgeleitet wurde, während für die Anwendung der Grundgleichung (21), wenigstens für kleine Dämpfung, die Intervallgröße verdoppelt oder verdreifacht werden kann.

Ein einfaches Zahlenbeispiel soll eine erste Beurteilung der erreichbaren Genauigkeit erlauben. Wir betrachten den einfachen Fall der ungedämpften harmonischen Schwingung mit der Masse M und der Federkonstanten R . Mit $c = M/R$ lautet die Schwingungsgleichung

$$y'' + c y = 0, \quad (22)$$

deren mathematische Lösung für $y'_A = 0$ und mit $\rho = \sqrt{c}$ sich zu

$$y = y_A \cos \rho t$$

ergibt. Für die Anwendung unserer Grundgleichung ergibt sich

$$\gamma = c \frac{\Delta t^2}{12} = \rho^2 \frac{\Delta t^2}{12} = \frac{\pi^2}{12 n^2},$$

wenn wir mit n den Wert

$$n = \frac{\pi}{p \Delta t} = \frac{T}{2 \Delta t}$$

bezeichnen. Die Grundgleichung (21) vereinfacht sich hier auf

$$y_{m+1} = y_m \frac{2 - 10\gamma}{1 + \gamma} - y_{m-1},$$

während andererseits die Voraussetzungen für die Randbedingung (20c):

$$y_1 = y_A \frac{1 - 5\gamma}{1 + \gamma}$$

erfüllt sind. Wählen wir z.B. $n = 12$, was einem Intervall von $p \Delta t = 15^\circ$ entspricht, so wird

$$\gamma = 0,00571158, \frac{2 - 10\gamma}{1 + \gamma} = 1,931850,$$

und wir erhalten für den ersten Viertel der Schwingungsdauer die folgenden Werte y :

$x = p t = 0^\circ:$	$y = 1,00000 \cdot y_A$	$\cos p t = 1,00000$
15°	0,96593	0,96592
30°	0,86602	0,86602
45°	0,70710	0,70711
60°	0,49999	0,50000
75°	0,25880	0,25882
90°	0,00002	0,00000;

die Genauigkeit lässt praktisch nichts zu wünschen übrig.

Verdoppeln wir die Intervallgröße ($n=6$), so ergeben sich mit $\gamma=0,0228463$ die Werte y zu

$x = p t = 0^\circ:$	$y = 1,00000 \cdot y_A;$	$y_D = 1,00000 \cdot y_A$
30°	0,86598	0,86292
60°	0,49986	0,48926
90°	-0,00025	-0,01854

auch diese Genauigkeit dürfte noch für die meisten praktischen Zwecke mehr als ausreichend sein.

In der letzten Tabelle sind zum Vergleich auch die Werte y_D eingetragen, die sich aus der Differenzenrechnung [Gleichung (13)] mit

$$y_{m+1} = y_m (2 - 12\gamma) - y_{m-1}$$

ergeben. Der Unterschied in der Genauigkeit ist offensichtlich.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß wir mit der gefundenen Rekursionsformel

$$y_{m+1} = \frac{2 - 10\gamma}{1 + \gamma} y_m - y_{m-1}$$

die Kreisfunktionen $\sin x$ und $\cos x$ berechnen können, während sich durch Umkehrung des Vorzeichens von γ mit

$$y_{m+1} = \frac{2 + 10\gamma}{1 - \gamma} y_m - y_{m-1}$$

die hyperbolischen Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ ergeben.

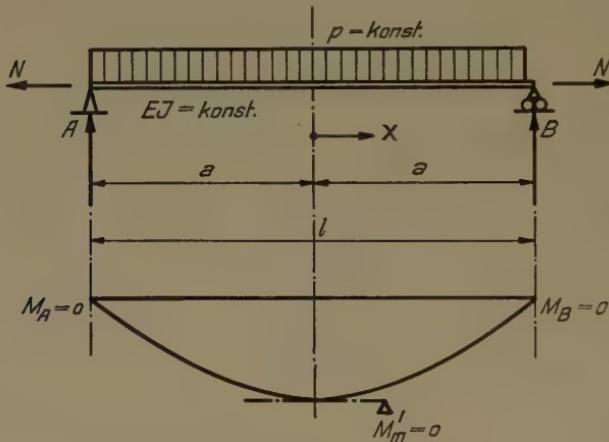


Fig. 6

b) Formänderungsgleichungen

Wir wählen hier als Beispiel, um Anwendungsform und Genauigkeit zu zeigen, einen einfachen Balken mit konstanter Steifigkeit EJ , der durch eine gleichmäßig verteilte Belastung p und durch eine axiale Zugkraft N belastet sein soll (Fig. 6). Aus

$$M = M_0 - N \eta$$

bzw.

$$M'' = M''_0 - N \eta'',$$

wobei η die Durchbiegung bedeutet, und aus der Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\eta'' = - \frac{M}{EJ}$$

erhalten wir mit $M_0'' = -p$ die Differentialgleichung für die Bestimmung des Biegunsmomentes $M = y$ in der Form

$$y'' - \frac{N}{EJ} y + p = 0. \quad (23a)$$

Unter Beachtung der in Fig. 5 gewählten Koordinatenachsen und der Randbedingungen

$$x = 0: y'_A = 0$$

$$x = a: y_B = 0$$

ergibt sich die mathematische Lösung mit

$$\omega^2 = \frac{N}{EJ}$$

zu

$$y = \frac{p}{\omega^2} \left(1 - \frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega a} \right),$$

die für die Balkenmitte den Wert

$$y_m = \frac{p}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \omega a} \right)$$

annimmt. Wählen wir beispielsweise $\omega a = 2$, so erhalten wir

$$\underline{y_m = M_m = 0,04589 p l^2.}$$

Die baustatische Lösung ist durch das Gleichungssystem (19) gegeben, wobei wir das negative Vorzeichen von γ

$$\gamma = c \frac{\Delta x^2}{12} = \frac{N}{EJ} \cdot \frac{\Delta x^2}{12} = \omega^2 \frac{\Delta x^2}{12}$$

zu beachten haben:

$$-y_{m-1}(1-\gamma) + y_m(2+10\gamma) - y_{m+1}(1-\gamma) = p \Delta x^2.$$

Wir wählen absichtlich eine sehr grobe Teilung, $\Delta x = a/2 = l/4$; damit wird für $\omega a = 2$

$$\gamma = \omega^2 \frac{a^2}{48} = \frac{1}{12} = 0,08333.$$

Unter Beachtung der Randbedingung, $y_A = 0$, und Ausnutzung der Symmetrie

brauchen wir nur zwei Gleichungen anzuschreiben

$$\begin{aligned} 2,83333 y_1 - 0,91667 y_m &= 0,0625 \varphi l^2 \\ -1,83333 y_1 + 2,83333 y_m &= 0,0625 \varphi l^2, \end{aligned}$$

deren Auflösung (mit dem Gaußschen Algorithmus) uns den Wert von

$$\underline{y_m = M_m = 0,04595 \varphi l^2}$$

ergibt. Trotz der sehr kleinen Zahl der Felder Δx beträgt der Unterschied gegenüber der genauen mathematischen Lösung nur 0,13%; die Genauigkeit des Verfahrens ist somit praktisch mehr als ausreichend. Bei einer Berechnung mit endlichen Differenzen hätte der Fehler immerhin 2,7% betragen.

Eine zu Gleichung (23a) analoge Beziehung besteht für die Durchbiegungen η

$$\eta'' - \frac{N}{EJ} \eta + \frac{M_0}{EJ} = 0. \quad (23b)$$

Die beiden Gleichungen (23a) und (23b), die übrigens die Mohrsche Analogie der Biegungslinie für den erweiterten Fall der Biegung mit Längskraft veranschaulichen, sind nur für den Fall statisch bestimmter Lagerung direkt lösbar. Für statisch unbestimmt gelagerte Balken nämlich besitzen wir in Gleichung (23a) nicht die Möglichkeit, die Elastizitätsbedingung, z. B. $\eta'_A = 0$ bei starrer Einspannung, auszudrücken, während wir in Gleichung (23b) das Belastungsglied, nämlich die sich auf die statisch unbestimmte Lagerung beziehenden Momente M_0 , nicht kennen.

Eine dem Wesen nach mathematisch orientierte Lösung des Problems besteht nun darin, daß wir die beiden Gleichungen zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung vereinigen:

$$(EJ\eta'')'' - N\eta'' - \varphi = 0, \quad (24)$$

die wir baustatisch unter Beachtung der vier Randbedingungen durch ein fünfgliedriges Gleichungssystem lösen könnten.

Die baustatisch orientierte Lösung dagegen besteht darin, daß wir ein statisch bestimmtes Grundsystem einführen und die überzähligen Größen, z. B. die Einspannmomente, durch die Elastizitätsbedingungen ermitteln.

Damit erkennen wir aber die Möglichkeit, gewisse Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Hilfe der Theorie statisch unbestimmter Tragwerke auf solche zweiter Ordnung zurückzuführen zu können. Diese Möglichkeit dürfte auch in anderen Fällen als in unserem Beispiel zu einer willkommenen Vereinfachung der Rechnung führen.

c) Stabilitätsprobleme

Wir beschränken uns hier auf eine kurze grundsätzliche Bemerkung.

Beim beidseitig gelenkig gelagerten Druckstab (Eulerscher Grundfall) ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Momenten mit

$$c = \frac{P}{EJ}$$

die Differentialgleichung des Knickproblems zu

$$y'' + c y = 0$$

mit den Randbedingungen $y_A = 0$, $y_B = 0$.

Trotzdem die Differentialgleichung genau mit denjenigen der harmonischen Schwingung übereinstimmt [Gleichung (22)], ist der dort verwendete Lösungsweg hier nicht mehr anwendbar. Dies röhrt nicht nur von der Verschiedenheit der Randbedingungen her, sondern ursächlich davon, daß hier die gesuchte Unbekannte, die kritische Last P_{kr} , im Koeffizienten c enthalten ist.

Eine Lösung ergibt sich hier, indem wir in der Grundgleichung die Unbekannte c auf eine Seite bringen:

$$-y_{m-1} + 2y_m - y_{m+1} = \gamma (y_{0m-1} + 10y_{0m} + y_{0m+1})$$

und die Ausbiegungen y_0 der rechten Seite als geschätzte Ausgangskurve auffassen; die Ausbiegungen y der linken Seite ergeben sich damit aus einem normalen Seilpolygon. Die Stabilitätsbedingung $y - y_0$ liefert die gesuchte Knicklast P_{kr} . Damit ist der Zusammenhang unserer Untersuchungsmethode mit dem Verfahren der sukzessiven Approximation von ENGESSER-VIANELLO hergestellt.

Nun gibt es aber Stabilitätsprobleme, wie etwa das Kippen von Trägern mit I-Querschnitt, mit der Differentialgleichung

$$\varphi''' - \frac{a^2}{l^2} \varphi'' - \frac{M_1^2}{B_2 C} \cdot \frac{a^2}{l^8} \varphi = 0,$$

bei denen sich eine einfache und übersichtliche Lösung dadurch ergibt, daß wir das Approximationsverfahren nach ENGESSER-VIANELLO mit der baustatischen Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung nach Gleichung (19) kombinieren¹⁾.

¹⁾ F. STÜSSI, *Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers*, Abh. Int. Ver. Brückenbau u. Hochbau 3 (1934).

6. Schlußbemerkungen

Die hier im Überblick gezeigte Anwendung der Seilpolygongleichung zur Lösung von Randwertproblemen ist erweiterungsfähig: Kombinieren wir zwei Seilpolygone, so gelangen wir zu einer Lösung von Differentialgleichungen vierter Ordnung¹⁾; kreuzen wir zwei Gruppen von Seilpolygonen, so führt dies zur Lösung von Platten- und Scheibenproblemen²⁾.

Trotz der Leistungsfähigkeit und Genauigkeit des hier vorgelegten numerischen Rechnungsverfahrens bleibt die Bedeutung der mathematischen Analysis für Ausbildung und Praxis des Ingenieurs uneingeschränkt bestehen. Für die Lösung vieler Probleme der Ingenieurpraxis aber sind direkt auf den Einzelfall anwendbare numerische Methoden eine Notwendigkeit. Ich habe versucht, hier eine solche numerische Methode zu skizzieren, die nicht eine grobe Übersetzung der Analysis darstellt, sondern die auf eigenen Grundbegriffen der Baustatik und der Mechanik beruht und von der angenommen werden darf, daß sie auch in anderen Gebieten der Ingenieurwissenschaften gute Dienste wird leisten können.

Résumé

En traduisant la construction graphique du polygone funiculaire pour des charges verticales par l'équation du polygone funiculaire

$$\gamma_{m-1} - 2 \gamma_m + \gamma_{m+1} = \Delta_x K_m(y'')$$

on peut résoudre numériquement avec très grande précision des équations différentielles de la forme

$$y'' + b y' + c y + F(x) = 0$$

en les transformant simplement en un système d'équations ternaires. La méthode est comparée à celle des quotients de différences finies. Différents modes d'application sont indiqués et illustrés par des exemples.

(Eingegangen: 23. 9. 49.)

¹⁾ F. STÜSSI, Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten, Abh. Int. Ver. Brückenbau u. Hochbau 8 (1948).

²⁾ CH. DUBAS, Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies, Diss. ETH., Mitt. Inst. Baustatik, Heft 23 (1948).

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

**Die zu einem Koordinatenwert gehörigen Auswahlregeln
der Röntgeninterferenzen in verschiedenen Raumsystemen**

Von PAUL NIGGLI, ETH., Zürich

Bekanntlich ist durch E. V. FEDOROW und A. SCHÖNFLIES die Lehre von den Raumgitterstrukturen entwickelt worden, lange bevor das Studium der Beugungerscheinungen von Röntgenlicht an Kristallen begann. Nach 1911 konnte es sich nur darum handeln, die geometrischen oder gruppentheoretischen Ergebnisse für die Kristallstrukturbestimmung nutzbar zu machen. Das geschah vor 30 Jahren¹⁾ durch eine explizite Darstellung der 230 Raumsysteme, vor allem aber durch die gleichzeitige erstmalige Aufstellung der sogenannten *Auslöschungsgesetze in ihrer Abhängigkeit von Raumsystemsymmetrie und Punktlage*. Es wurden Bestimmungstabellen für die Raumsysteme entwickelt, d.h. angegeben, was für Regeln des Auftretens bzw. des Nichtauftretens von Röntgeninterferenzen für die einzelnen Raumsysteme charakteristisch sind (*Auslöschungsgesetze*). Die weitere Ausarbeitung dieses notwendigen Hilfsmittels erfolgte 10 Jahre später durch E. BRANDENBERGER²⁾. Obwohl diese Gesetze bei der Strukturbestimmung ständig gebraucht werden, fehlt es oft an einer vollen Ausnutzung der Beziehungen. Selbst in den Internationalen Tabellen zur Kristallstrukturbestimmung³⁾ wurden im Hauptteil nur die Auslöschungsgesetze für Punkte mit Symmetriebedingungen angegeben, obwohl dem Wesen nach die Auslöschungsgesetze in erster Linie mit der symmetriebedingten allgemeinen Raumteilung verknüpft sind und nicht nur für Punkte spezieller Symmetriebedingung besondere Bedeutung erlangen. Für die Bestimmung der Koordinaten x, y, z des Basispunktes eines Gitterkomplexes wird folgendes Vorgehen oft zweckmäßig sein. Man fragt, ob es zur Bestimmung von x Auslösungen gibt, die unabhängig von y, z nur vom Koordinatenwert x abhängig sind, und versucht dasselbe für die Koordinate y unabhängig von x und z sowie für z unabhängig von y, x festzustellen.

Eine neue kondensierte Darstellung aller Raumsystemseigenschaften in Form einer matrizenähnlichen sogenannten Charakterentafel⁴⁾ erleichtert die Ableitung außerordentlich. Wir begnügen uns mit einem Beispiel, dem Raumsystem D_{2h}^8 in der Aufstellung der «Internationalen Tabellen». Die hier nicht näher zu erläuternde Charakterentafel lautet:

h	D_{2h}^8			l	$i\alpha$
	(1)	1	1̄		
	1	(1)	1̄	l	$i\beta$
	1̄	1	(1)	h	$i\gamma$

¹⁾ P. NIGGLI, *Geometrische Kristallographie des Diskontinuums* (Berlin 1918/20).²⁾ E. BRANDENBERGER, Z. Krist. 68 (1928).³⁾ Internationale Tabellen zur Bestimmung der Kristallstrukturen, Bd. I (Berlin 1935).⁴⁾ Siehe: P. NIGGLI, Acta cristallographica (1949).

Daraus ersieht man, daß mit dem Symmetriezentrum als Nullpunkt folgende Scharen Symmetrieelemente sind:

$(100)_{\frac{1}{4}}$ und $(100)_{\frac{3}{4}}$ Gleitspiegelebenen mit $c/2$ als Gleitkomponente

$(010)_0$ und $(010)_{\frac{1}{2}}$ Gleitspiegelebenen mit $c/2$ als Gleitkomponente

$(001)_0$ und $(001)_{\frac{1}{2}}$ Gleitspiegelebenen mit $a/2$ als Gleitkomponente

$[100]_{0\frac{1}{4}} [100]_{0\frac{3}{4}} [100]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}} [100]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ Helikodigryen

$[010]_{0\frac{1}{4}} [010]_{0\frac{3}{4}} [010]_{\frac{1}{2}\frac{1}{4}} [010]_{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}$ Digryen

$[001]_{\frac{1}{4}0} [001]_{\frac{3}{4}0} [001]_{\frac{1}{4}\frac{1}{2}} [001]_{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ Digryen.

Ferner ergibt sich unmittelbar, daß der Strukturfaktor lautet:

$$A = \pm 8 \underbrace{\cos 2\pi h x}_{1. \text{ Glied}} \underbrace{\sin 2\pi k y}_{2. \text{ Glied}} \underbrace{\cos 2\pi l z}_{3. \text{ Glied}}$$

Es sind Sinus- statt Kosinuswerte zu nehmen für das

1. Glied	2. Glied	3. Glied, wenn jeweilen
$-(h + l)$ bzw.		
$h + l = i_\alpha$	$l = i_\beta$	$h = i_\gamma$

ungerade sind. Es ist das Minuszeichen statt das Pluszeichen einzusetzen, wenn nicht alle drei Horizontalsummen der Zusatzgrößen als $i_\alpha, i_\beta, i_\gamma$ gerade sind, oder mit andern Worten, wenn überhaupt Sinus- statt Kosinusglieder auftreten. (Es können sich hier nicht mehr als zwei Sinusglieder einstellen.) Eine in der Literatur¹⁾ angegebene Regel für die Wahl des Plus- und Minuszeichens gilt für den gewählten Nullpunkt in einfachen D_{2h}^q nicht allgemein, sondern ist sinngemäß durch eine der obigen analogen Formulierung zu ersetzen.

Durch die Symmetriequalitäten wird der Raum in Ebenenscharen parallel (100) , (010) und (001) und in Geradenscharen parallel $[100]$, $[010]$ und $[001]$ zerlegt, die geometrische Orte von Punkten mit bestimmten Auswahlregeln sind. Hauptebenen und Hauptgeraden mit einfachen Auslöschungsgesetzen sind in einfachen orthorombischen Raumsystemen nur diejenigen, die, mit dem Symmetriezentrum als Nullpunkt, durch Punkte gehen, deren Koordinatenwerte lediglich die Zahlen $0, 1/2, 1/4, 3/4$ enthalten, jedoch gleichgültig, ob sie einem Symmetrieelement entsprechen oder nicht. Es genügt die Ebenen $(100)_0, (100)_{1/4}, (010)_0, (010)_{1/4}, (001)_0, (001)_{1/4}$ zu betrachten. Die Geraden ergeben sich als Schnittlinien dieser Ebenen, wobei 0 als untere Kennziffer auch durch $1/2$ und $1/4$ durch $3/4$ ersetzt werden kann.

$(100)_0$ bedeutet Koordinate $x = 0$, während y, z beliebige Werte haben können; $(010)_{1/4}$ bedeutet Koordinate $y = 1/4$, Koordinaten x, z beliebig usw. Nun ergeben sich die einfachen Regeln für die Punkte:

$x = 0$, also auf $(100)_0$, dann fehlen Interferenzen, wenn $i_\alpha = (h + l) = \text{ungerade}$;
 $y = 0$, also auf $(010)_0$, dann fehlen Interferenzen, wenn $i_\beta = l = \text{ungerade}$;
 $z = 0$, also auf $(001)_0$, dann fehlen Interferenzen, wenn $i_\gamma = h = \text{ungerade}$.

¹⁾ Siehe: P. NIGGLI, Acta cristallographica (1949).

Für $x = 1/4$ muß $i_\alpha + h = 2h + l$ ungerade sein, und somit, da $2h$ stets gerade ist, l ungerade.

Für $y = 1/4$ muß $i_\beta + k = l + k$ ungerade sein.

Für $z = 1/4$ muß $i_\gamma + l = h + l$ ungerade sein, damit Interferenzen notwendigerweise fehlen.

Die Gerade $[001]_{(1/4)0}$ ist Schnittlinie von $(100)_{1/4}$ und $(010)_0$, also gelten:

Es fehlen Interferenzpunkte mit $l = \text{ungerade}$ (keine Zusätze zur Ebenenbedingung, da beide Zusätze gleich sind).

$[010]_0(1/4)$ -Punkte liegen auf $(100)_0$ und $(001)_{1/4}$, auch hier verlangen beide Ebenen die gleiche Bedingung $h + l = \text{ungerade}$ für die Auslöschung. Diese Bedingung gilt somit nicht nur für die Digyrenpunkte, sondern für viele andere Punkte.

Punkte $[001]_{00}$, also Punkte $00z$, liegen auf der Schnittlinie $(100)_0$ mit $(010)_0$. Es fehlen für derartige Punkte somit Interferenzen, wenn $(h + l)$ und wenn l ungerade sind, es treten somit nur Interferenzen auf, wenn sowohl h wie l gerade sind.

Die Weiterführung und Verallgemeinerung wird keine Schwierigkeiten bereiten; so sind die Symmetriezentren Schnittpunkte von $(100)_0$ mit $(010)_0$ und $(001)_0$, d.h. es fehlen Interferenzen, wenn $(h + l)$ oder l oder h ungerade sind, d.h. es treten nur Interferenzen auf, wenn sowohl h gerade wie l gerade ist.

Man kann für die Hauptpunkte die Ergebnisse in folgender kleinen Tabelle zusammenfassen:

$(h k l)$ in D_{2h}^8

	x		y		z	
	0 oder $1/2$	$1/4$ oder $3/4$	0 oder $1/2$	$1/4$ oder $3/4$	0 oder $1/2$	$1/4$ oder $3/4$
Auslösungen, wenn folgende Größen ungerade	$(h + l)$	l	l	$(k + l)$	h	$(h + l)$

Auch aus ihr lässt sich unmittelbar für irgendeinen Hauptpunkt, ob durch Symmetrie ausgezeichnet oder nicht, das zugehörige Auslöschungsgesetz zusammensetzen: z.B. ergibt sich für $0, 1/4, 1/2$ Auslöschung, wenn $(h + l)$ oder $(k + l)$ oder h ungerade sind, d.h. es treten nur Interferenzen auf, wenn $(h + l), (k + l)$ und h gerade sind, was notwendig verlangt: sowohl h wie k wie l gerade. Es erzeugt somit dieser Punkt ohne Symmetriebedingung eine sehr ausgesprochene Selektion. Allgemein treten für D_{2h}^8 diese Bedingungen $(h + l), (k + l), h$ oder l , die stets Auslösungen ergeben, sofern nicht alle Indizes gerade sind, bei folgenden Kombinationen auf:

x	y	z
0 oder $1/2$	$1/4$ oder $3/4$	0 oder $1/2$
$1/4$ oder $3/4$	$1/4$ oder $3/4$	0 oder $1/2$
$1/4$ oder $3/4$	$1/4$ oder $3/4$	$1/4$ oder $3/4$

Alle diese Gesetze beziehen sich im übrigen auf beliebiges $(h k l)$; für $(0 k l), (h 0 l), (h k 0)$ können sich leicht ableitbar zusätzliche Auswahlregeln ergeben.

Sofort lassen sich auch die allgemeinen Auswahlregeln für beliebiges x oder y oder z und für $(h k l)$ angeben.

Es fehlen Interferenzen $(h k l)$, d.h. $A = 0$, wenn

$$\begin{aligned} \text{für } x \text{ gilt: } -4hx + i_x &= \text{ganzzahlig ungerade,} \\ \text{für } y: \quad -4ky + i_y &= \text{ganzzahlig ungerade,} \\ \text{für } z: \quad -4lz + i_z &= \text{ganzzahlig ungerade.} \end{aligned}$$

Daß die oben genannten Fälle daraus resultieren, wenn für x oder y oder $z = 0$ oder $1/4$ eingesetzt wird, ist evident.

Dem Kenner der Raumgittergeometrie wird es leicht fallen, zunächst wenigstens für jedes einfache orthorhombisch-holoedrische Raumsystem vollständige Tabellen der Auslöschungsgesetze für die Hauptpunkte zu konstruieren.

Auch die Erweiterung auf Nebenpunkte (Koordinaten von 0, 1/4, 1/2, 3/4 verschieden) bietet, wie oben für $(h k l)$ dargetan, keine Schwierigkeiten. Natürlich ist zu beachten, daß für Leitzonen einzelne der Regeln allgemein gelten, zum Raumsystem gehören und daher bei allen x -, y - wie z -Werten auftreten. Diese Regeln können natürlich nicht zur speziellen Koordinatenbestimmung dienen. Andere ergeben, wie bereits erwähnt, schon für $(h k l)$ Vieldeutigkeiten, die je-weilen in Betracht zu ziehen sind.

(Eingegangen: 10. 10. 49.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Berichte über die Internationale Tagung für Kernphysik und Quantenelektrodynamik

1. Tagung in Basel vom 5. bis 9. September 1949

Die zur Diskussion stehenden Gebiete umfaßten

1. Experimentelle Methoden der Kernphysik. – Es wurde vorgetragen über: Ionisationskammer, Zählrohre, Szintillationszähler, Ionenquellen, Apparate zur Erzeugung von großen Teilchenenergien, File.
2. Fragen über die Theorie des Kernbaus.
3. Neueste Entwicklung der Quantenelektrodynamik.

Die Vorträge werden in einem besonderen Bericht als Supplement der *Helvetica physica acta* erscheinen. Über die Hauptvorträge können folgende Angaben gemacht werden.

1. *Experimentelle Methoden*

E. SEGRÈ (Berkeley) berichtete über die Verwendung der Elektronensammlung in der Ionisationskammer und machte Angaben über das Verhalten von Elektronen in Gas-mischungen (z.B. Edelgase und CO_2). Ionisationskammern für spezielle Zwecke wurden erwähnt.

O. BUNEMAN (Harwell) besprach die Abschirmwirkung von Gittern, bei ebenen Ionisationskammeranordnungen für Elektronensammlung.

B. PONTECORVO (Harwell) diskutierte die Verwendung des Proportionalzählrohrs für Energiemessungen bis zu 100 eV. Eigenschaften wie Gasmultiplikation, Änderung der

Arbeit pro Ionenpaar mit der Energie der Elektronen und der Energieauflösungsvermögen wurden diskutiert.

Im Referat von H. DEN HARTOG (Amsterdam) wurden folgende Punkte behandelt: Wanderung der primär ausgelösten Elektronen zum Draht (*time lag*), Auflösungsvermögen für Koinzidenzen, Ausbreitungsmechanismus der Entladung, Zählverluste bei hohen Stoßzahlen.

O. R. FRISCH (Cambridge) behandelte in seinem Vortrage die Szintillationszähler. Als Vorteile dieser Nachweismethode gegenüber dem Zählrohr wurden erwähnt: Große Empfindlichkeit für γ -Strahlen, kurze Dauer der Einzelimpulse und daher hohe Stoßzahlen, gutes Auflösungsvermögen für Koinzidenzen. Lichtleitung zum Multiplier ermöglicht Zählvorgänge in starken Magnetfeldern und bei beschränkten Platzverhältnissen; praktisch unbeschränkte Lebensdauer der Meßanordnung. Nachteile: Hoher Untergrund, Verwendung von gut stabilisierten Spannungen, breite Impulsverteilung für monochromatische Strahlung.

Die vier ersten Hauptvorträge befaßten sich mit Nachweisapparaten für Korpuskeln und γ -Quanten. Es war aus ihnen ersichtlich, daß heute die experimentellen Nachweismethoden und ihr theoretisches Verständnis so weit entwickelt sind, daß für jedes Problem die geeigneten Hilfsmittel ausgewählt werden können.

A. G. WARD (Harwell) sprach über die Hochfrequenzquellen. Nähere Angaben über Gasreinheit, Erzeugung eines hohen Prozentsatzes von Atomionen, Gasdruck und Lebensdauer wurden gemacht. Für die Güte der Ionenquelle ist das Herausziehen der positiven Ionen aus der Entladung ein entscheidender Punkt.

E. M. McMILLAN (Berkeley) behandelte die Apparate zur Erzeugung großer Teilchenenergien, und L. J. HAWORTH (Brookhaven National Laboratory) referierte speziell über das in Brookhaven im Bau befindliche Proton-Synchrotron (Kosmotron). McMILLAN schlug folgende Bezeichnung der verschiedenen Maschinen vor:

Synchrotron: Beschleunigung von Elektronen durch Veränderung des magnetischen Feldes (Bahnradius konstant).

Synchrozyklotron: Beschleunigung von Ionen durch Veränderung der Frequenz ω der Hochfrequenzspannung (Bahnradius veränderlich, Magnetfeld H konstant).

Betatron: Beschleunigung von Ionen durch Veränderung von ω und H (Bahnradius konstant).

Aus den beiden aufschlußreichen Referaten ging deutlich hervor, daß trotz der großen Kosten und der technischen Schwierigkeiten, die beim Bau solcher Apparate eintreten, ihre Vollendung in nicht zu ferner Zukunft zu erwarten ist. Damit kann ein neuer Abschnitt in der kernphysikalischen Forschung, die eigentliche Nukleonensphysik, beginnen, indem es möglich wird, mit Energien zu operieren, die heute noch allein in den kosmischen Strahlen zur Verfügung stehen.

E. BRETSCHER (Harwell) berichtete über die Grundlagen der homogenen und der inhomogenen Pile und die Verwendung der Pile als Meßinstrument und als Neutronenquelle. L. KOWARSKI (Paris) machte in seiner Mitteilung einige Angaben über die Pile von Châtillon.

2. Kerntheorie

L. ROSENFELD (Manchester) sprach über die Theorie der leichten Kerne. Sein Überblick streifte die vorliegenden theoretischen Versuche zum Kernbau, wobei klar wurde, daß heute noch keine ausreichende Theorie der Kernkräfte existiert.

E. SEGRÈ (Berkeley) diskutierte die (n, p) -Streuung bei 45, 90 und 260 MeV und die (p, p) -Streuung bei 32 und 300 MeV. Phänomenologische Kräftepotentiale können die Streuexperimente nicht befriedigend erklären. Die Versuche über die künstliche Erzeugung von π -Mesonen, über die E. M. McMILLAN (Berkeley) noch berichtete, zeigen, daß die Vorstellungen, die der Mesontheorie zugrunde liegen, der Wirklichkeit nicht widersprechen. In der Diskussion betonte W. HEISENBERG (Göttingen) mit besonderem Nachdruck, daß viele Kerneigenschaften, wie vor allem das Auftreten einer Schalenstruktur (*magic numbers*), besser mit dem sogenannten *Quasi-atomic-model* erklärt werden können.

3. Quantenelektrodynamik

Der Vortrag von I. I. RABI (Columbia University) befaßte sich mit der Messung des anomalen magnetischen Momentes des Elektrons. Die Messungen sind heute bereits so präzis, daß die räumliche Ausdehnung der Ladung im Deuteron zu ihrer Deutung herangezogen werden muß.

J. SCHWINGER (Harvard University) referierte in einem sehr interessanten Vortrage über die neueste Entwicklung der Quantenelektrodynamik. Seine Ausführungen befaßten sich damit, daß alle Singularitäten der Quantenelektrodynamik sich entweder allgemein als Selbstenergie oder als Selbstladung darstellen lassen oder mit Hilfe des Postulates der Eichinvarianz eliminiert werden können. In der Diskussion betonte W. PAULI (Zürich), daß in den Regeln, nach welchen mit divergierenden oder unbestimmten Ausdrücken gerechnet wird, ein physikalischer Gehalt verborgen sein müsse, der über die bestehende Theorie hinausweist.

P. Huber und M. Fierz

2. Tagung in Como vom 11. bis 16. September 1949

Höhenstrahlung

War der erste Teil des Internationalen Kongresses für Kernphysik, Quantenelektrodynamik und Höhenstrahlung – zumindest was die Experimentalphysik anbetrifft – vornehmlich meßtechnischen und apparativen Fragen gewidmet, so bot der zweite, der Höhenstrahlung gewidmete Teil Einblick in die grundlegendsten Probleme, die heute den Physiker beschäftigen.

Im Brennpunkt seines Interesses steht die Frage nach der Natur der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkung, deren Beantwortung die Lösung des Rätsels der Kernkräfte bedeuten würde. Experimentell kann man zur Lösung dieser Frage beitragen, indem man die Teilchen, z.B. in Stoßprozessen, bei möglichst hohen Energien in Wechselwirkung bringt.

Wir wissen heute, daß beim Zusammenstoß schwerer, relativ stabiler Teilchen (Nukleonen) leichte, instabile (Mesonen) entstehen können, wenn die Energie der Relativbewegung genügend groß ist. Die laboratoriumsmäßige Beschleunigung auf solche Energien steckt noch in ihren Anfängen, während uns in der Höhenstrahlung genügend energetische Teilchen ständig zur Verfügung stehen. Deshalb ergänzt die Höhenstrahlungsforschung die Kernphysik von der Seite der hohen und höchsten Energien her, die für die anfangs erwähnte Frage besonders wichtig sind.

Durch welchen Beschleunigungsmechanismus erreichen die Primärteilchen der kosmischen Strahlung die ungeheuren Energien, mit denen sie in die Erdatmosphäre eindringen? E. FERMI (Chicago) vermutet, daß die Primärstrahlung aus dem Milchstraßenraum kommt und durch interstellare wandelnde Magnetfelder beschleunigt wird, während sie nach dem Referat von H. ALFÉN (Stockholm) aus der Sonne stammen soll und durch geeignete Magnetfelder herumgeführt wird, die sie auch am Verlassen des Sonnensystems verhindern. E. BAGGE (Hamburg) trug über seine mit L. BIERMANN ausgearbeitete Theorie vor, die einerseits für die Sonne einen detaillierten Beschleunigungsmechanismus vorschlägt, bei dem die Sonnenflecken zusammenwirken, andererseits aber annimmt, daß auch andere Fixsterne Quellen der Primärstrahlung sind.

Die Höhenstrahlung hat eine vor allem in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel wechselnde, sehr komplexe Zusammensetzung. J. CLAY (Amsterdam) referierte über letztere. Aus der Analyse der Zusammensetzung kann man Schlüsse über das Schicksal (Erzeugung, Zerfall) der beteiligten Teilchen ziehen.

Einen besonderen Auftrieb hat die Erforschung der Höhenstrahlung durch die Technik der photographischen Emulsionen erhalten. Diese gipfelte vor etwa einem Jahre in der Herstellung von Spezialemulsionen, die durch alle geladenen Teilchen, unabhängig von deren Energie und Masse, entwickelt werden. Setzt man solche Emulsionen der Höhenstrahlung aus, so beobachtet man die durch Kernexplosionen hervorgerufenen «Sterne». In den neuesten Platten sind nun in den meisten Sternen neben den dicken, von Kernetrümtern hervorgerufenen Spuren auch dünne Spuren zu beobachten, die man Teilchen relativistischer Energie zuordnen muß. Die letzten Untersuchungen befassen sich mit der Identifizierung, Anzahl je Stern, Winkelverteilung usw. dieser Spuren, so die Referate von

C. F. POWELL (Bristol), L. LEPRINCE-RINGUET (Paris) und M. COSYNS (Brüssel). Das Arbeiten mit solchen Platten stellt aber eine große Reihe von Problemen, deren Lösung allein die Vertrauenswürdigkeit der Ergebnisse gewährleisten kann (Referat von G. P. S. OCCIALINI, Brüssel, und Kurzreferate seiner Schüler).

Die soeben erwähnten, in Platten beobachteten Ereignisse sind engstens verknüpft mit den wohlbekannten großen Schauern, die bisher meistens mit Zählrohren untersucht wurden. L. JÁNOSSY (Dublin) referierte umfassend über die in Luftschaubern auftretenden durchdringenden Teilchen, P. M. S. BLACKETT (Manchester) über Untersuchungen durchdringender Schauer mit der Wilsonkammer.

Es läßt sich zeigen, daß zumindest ein Großteil der in den Kernexplosionen beobachteten Teilchen Mesonen sind. Dies führt zur Frage, ob bei einem Stoß zwischen Nukleonen jeweils nur ein oder auch mehrere Mesonen zugleich entstehen können. W. HEITLER (Zürich) und L. JÁNOSSY vertreten den ersteren Standpunkt, während W. HEISENBERG (Göttingen) die Mehrfacherzeugung vorzieht. Die Entscheidung dieses wichtigen Diskussionspunktes bleibt der Zukunft vorbehalten.

Die Höhenstrahlenforschung hat in den letzten Jahren die Anzahl der bekannten Elementarteilchen wiederholt erhöht; die Existenz zweier verschiedener Mesonarten wurde sichergestellt. Andere Mesonen, wie z. B. das sogenannte τ -Meson, welches rund 1000 Elektronenmassen besitzt, erschienen bisher den Experimentatoren in oft veränderter Gestalt, so daß an ihrer Existenz zu zweifeln war. Neuere Versuche von R. B. BRODE (Berkeley) und Mitarbeitern zeigen Hinweise auf die Existenz eines schweren Mesons; dagegen lieferten die Messungen von C. FRANZINETTI (Bristol) und S. ROSENBLUM (Paris) auf dem Jungfraujoch keine Anhaltspunkte für das Vorkommen dieser oder noch schwererer Teilchen, wie sie z. B. von russischer Seite vorgeschlagen wurden. Der Sachverhalt bleibt hiermit vorderhand unverändert.

V. L. Telegdi

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

The Physical Principles of Gas Liquefaction and Low Temperature Rectification. By M. DAVIES (Longmans, Green & Co, London, 1949). 205 pp., 88 Figs.; 25s.

Die Erzeugung tiefer Temperaturen und ihre Anwendung gewinnen in neuerer Zeit sowohl in den wissenschaftlichen Laboratorien wie auch in der Praxis fortwährend an Bedeutung. Die vorliegende Neuerscheinung ist daher sehr zu begrüßen. Der Verfasser erläutert in eingehender und leicht verständlicher Weise die thermodynamischen Grundlagen der Gasverflüssigung. Die praktisch bedeutsamen Verfahren zur Verflüssigung und Rektifikation von Gasen, hauptsächlich der Luft, und die dazu notwendigen Apparaturen werden beschrieben und miteinander verglichen. Zahlreiche Tabellen, Diagramme und numerische Berechnungen konkreter Beispiele machen das Buch vor allem für den Praktiker zu einem sehr brauchbaren und willkommenen Nachschlagewerk. Der Text ist leicht lesbar und durch viele historische Angaben bereichert. Auch dem Nichtfachmann wird das Buch viele wertvolle Kenntnisse vermitteln.

G. Busch

The practical Application of Acoustic Principles. By D. J. W. CULLUM (E. & F. N. Spon Ltd., London, 1949), 200 pp.; 16s.

Das vorliegende Buch verfolgt den Zweck, dem Baufachmann die Grundlagen schalltechnisch richtiger Baukonstruktionen zu vermitteln, wobei der Autor versucht, das nicht immer leicht übersichtliche Gebiet der Raum- und Bauakustik in zusammenhängender, logischer Form zur Darstellung zu bringen. Da das menschliche Ohr bei jeder bauakustischen Überlegung nicht außer acht gelassen werden darf, müssen naturgemäß auch hörphysiologische Betrachtungen angestellt werden, und das Buch beginnt mit einem Kapitel über Lautstärken; dabei wird der außerordentlich komplizierte Zusammenhang zwischen dem

physikalischen Reiz und der physiologischen Empfindung sehr hübsch geschildert, und es wird auch auf die eminenten, praktische Wichtigkeit der Verdeckungseffekte aufmerksam gemacht. Zur Raumakustik übergehend, werden die Begriffe Nachhall und Echo diskutiert, wobei man aber die so nützliche und so notwendige scharfe Trennung in geometrische, statistische und wellentheoretische Behandlung der raumakustischen Probleme vermißt. Als Einleitung für die Behandlung der Schallisolation (*Bauakustik*) wird gezeigt, daß sich schalldämmende Konstruktionen grundsätzlich als Tiefpaßfilter darstellen lassen, was sehr anschaulich und klar ist. Leider werden aber die elastischen Eigenschaften der besonders für Körperschalldämmungen verwendeten Materialien nur sehr summarisch und für die praktische Anwendung in wenig geeigneter Form behandelt. Sehr gut zur Darstellung kommt der Unterschied zwischen Absorptionsmaßnahmen und Dämmungsmaßnahmen bei der Lärmbekämpfung.

Anschließend werden in weiteren Kapiteln die schalltechnischen Eigenschaften der wichtigsten Bauelemente beschrieben. Bei den *Wänden* wird auf den einfachen Zusammenhang zwischen Schalldämmung und Wandgewicht hingewiesen, auf dem zuerst deutsche Forscher aufmerksam wurden und der erst verhältnismäßig spät in der angelsächsischen Literatur berücksichtigt wurde. Man vermißt die Unterscheidung zwischen effektiver und spezifischer Schalldämmung; die sehr zahlreichen Tabellen ersetzen die etwas lückenhafte Darstellung der grundsätzlichen Faktoren nicht. Bei den *Böden* werden Bauweisen angeführt, die bei uns weniger gebräuchlich oder sogar unbekannt sind. Es werden wohl viele konstruktive Details erwähnt, der Praktiker wird aber Mühe haben, die große Linie, die im Grunde genommen für alle diese Konstruktionen maßgebend ist, zu erkennen. Auch hier wären klarere Angaben über die elastischen Eigenschaften von Isoliermatten usw., die schließlich über die Güte der Trittschalldämmung eines schwimmenden Bödens entscheiden, wertvoll. Für schalldämmende *Türen* werden eine ganze Anzahl interessanter konstruktiver Einzelheiten angegeben, die klar erkennen lassen, daß es sich dabei um ein ausgesprochenes Spezialgebiet handelt, für das es viel Erfahrung und Wissen braucht; dasselbe gilt für die schalldämmenden *Fenster*. Sehr gut ist die Behandlung der *Ventilationsysteme*; hier findet man alle wesentlichen grundsätzlichen Überlegungen und Angaben, die der Konstrukteur für die schalltechnische Beurteilung braucht.

In einem besondern Kapitel werden die *Kinos* behandelt. Dabei ist auffallend, daß der Schwerpunkt der Behandlung auf der Nachhallzeit liegt und z. B. über die mindestens ebenso wichtige Raumform nur ganz allgemein und wenig spezifische Ausführungen zu finden sind. Der Einfluß der Raumform auf die Raumakustik wird in einem weiteren Kapitel etwas näher behandelt, das der *Akustik kleiner Räume* gewidmet ist. Hier werden die modernen polyzyklindrischen Wandbehandlungen erwähnt.

Es folgt ein Kapitel über den akustischen *Absorptionskoeffizienten*, wobei sehr klar und richtig erklärt und begründet wird, daß dieser praktisch so bequeme Begriff im Sinne der Sabineschen Definition gar nicht existiert. Der Autor verzichtet daher richtigerweise auf die Beilage langer Tabellen von Absorptionskoeffizienten, wie man sie häufig in älteren Akustikbüchern findet. Er zeigt dagegen eine Serie sehr gut ausgewählter typischer Frequenzkurven verschiedener Schallschluckanordnungen und zieht den richtigen Schluß, daß für die Erzielung guter Resultate eine große Dosis von Erfahrung notwendig ist und daß solchen Meßresultaten mehr qualitativer als quantitativer Charakter zukommt. Die Behauptung, daß dies nur für die absolute Größe des Absorptionskoeffizienten gelte und in viel geringerem Maße für den relativen Frequenzgang, scheint immerhin etwas gewagt!

Das Buch stellt zweifellos einen wertvollen und nützlichen Beitrag zum akustischen Schrifttum dar. Wenn schon an einigen Orten ein klareres Herausschälen der grundlegenden akustisch-physikalischen Prinzipien wünschbar gewesen wäre, so bringt es doch eine Fülle von Material und Gedanken, die sehr anregend sind.

W. Furrer

Differential Equations. By H. W. REDDICK (John Wiley & Sons, New York, 1949); 288 pp., 22 Figs.; \$ 3.00.

Dieses in erster Linie für Studierende der Ingenieurwissenschaften geschriebene Lehrbuch befaßt sich im wesentlichen mit den elementaren Integrationsmethoden der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Diese Methoden werden in

klarer und natürlicher Weise auseinandergesetzt und ihre praktische Handhabung durch geschickt ausgewählte Beispiele aus Physik, Chemie und Technik eingeübt. Ergänzt durch zahlreiche Übungsaufgaben entsteht so ein vollständiger Überblick über die Differentialgleichungen, die elementar gelöst werden können. Das Buch verlangt vom Leser nur die grundlegenden Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung.

Entsprechend seinem elementaren Charakter verzichtet das Buch auf die Herleitung von Existenztheoremen und auf die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen. Eigenwertprobleme werden nicht behandelt. Von den durch Differentialgleichungen definierten transzentalen Funktionen sind nur die Bessel-Funktionen kurz eingeführt. Der Verfasser benutzt für die Integration der linearen Differentialgleichungen die Methode der Differentialoperatoren, ohne aber auf die besonderen praktischen Vorteile der Operatorenrechnung (Einarbeitung der Anfangsbedingungen, Lösung von Ausgleichsproblemen usw.) einzugehen.

Inhalt: 1. Grundlagen; 2. Die Differentialgleichung einer Schar von Funktionen; 3. Differentialgleichungen erster Ordnung; 4. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten; 5. Einige spezielle Gleichungen höherer Ordnung; 6. Systeme von Differentialgleichungen; 7. Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung; 8. Lösungen durch Reihenansätze.

E. Stiefel

Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Von K. KÜPFMÜLLER (Verlag S. Hirzel, Zürich 1949). 386 S., 474 Abb.; sFr. 32.—.

Die neuere Entwicklung der Nachrichtentechnik ist durch die ausgesprochene Verwendung von Impulsen gekennzeichnet. Es ist dabei vor allem an das Fernsehen, die Radartechnik und die verschiedenen Verfahren der Impulsmodulation zu denken. Bei der tonfrequenten Übertragung stand die Betrachtung der Vierpoligenschaften in bezug auf Dämpfung an erster Stelle. Es sind namentlich die Filter-Reaktanzvierpole sehr eingehend behandelt worden. Neben den Untersuchungen der stationären Eigenschaften sind die Fragen nach den Einschwingvorgängen verhältnismäßig wenig bearbeitet worden. Nur bei sehr langen Übertragungswegen haben die genannten Eigenschaften auch in der Telephontechnik große Bedeutung. Die korrekte Übertragung von Impulsen verlangt hingegen die vollständige Kenntnis des Übertragungsvierpols, d. h. sein komplexes Übertragungsmaß und damit den Einschwingvorgang.

Das vorliegende Werk versucht nunmehr diese Zusammenhänge zwischen Amplitudenverlauf, Phasenverlauf und Einschwingvorgänge aufzuzeigen. Das soll schon im Titel «Systemtheorie» zum Ausdruck kommen. Es werden vorerst drei Grundfunktionen, die Sprung-, Stoß- und Schrittfunktion genauer angesehen, welche den weitern Betrachtungen zugrunde liegen. Der Einfluß des Phasenmaßes und des Amplitudenverlaufes wird an Hand von typischen Beispielen rechnerisch verfolgt. Auf Grund solcher Einzelergebnisse, welche in einer Tabelle über verschiedene Einflüsse Aufschluß geben, kann man in übersichtlicher Weise ein Bild über die allgemeinen Zusammenhänge gewinnen. Die Behandlung erfolgt ausschließlich durch die Verwendung der Fourierschen Integraltransformation, wobei die Integration praktisch ausschließlich im Reellen durchgeführt wird. Die Art der Behandlung hat den Vorteil, daß mit geringem mathematischem Aufwand und auch geringen mathematischen Vorkenntnissen die für die Nachrichtentechnik wesentlichen Eigenschaften erfaßt werden können. Auf der andern Seite wäre es außerordentlich wünschenswert, die allgemeinen Theorien über die genannten Zusammenhänge näher beleuchtet zu sehen, d. h. den Anschluß mit den bekannten Theorien von BODE herzustellen, welche als Ausgangspunkt lediglich die Eigenschaft der Übertragungsfunktionen als analytische und positive Funktionen besitzen. Die letztere Methode ist wesentlich schwerer verständlich und erfordert ein größeres mathematisches Rüstzeug. Sie ist besonders nützlich nur bei Verwendung von Netzwerken minimaler Phase.

Neben den linearen Verzerrungen, wie Dämpfungs- und Phasenverzerrung, werden in einigen Kapiteln die nichtlinearen Verzerrungen behandelt. In einem weitern Abschnitt sind die modulierten Systeme untersucht, wie die Amplituden- und Frequenzmodulation. Insbesondere ist dabei die Behandlung der Phasen- und Dämpfungsverzerrungen berücksichtigt, ferner der Mehrfachempfang. Die Impulsmodulation wird verhältnismäßig kurz

gestreift. In einem besonderen Abschnitt werden die Störungen systematisch behandelt. Nach einer Klassifizierung verschiedener Störungsarten wird der Einfluß bei der Amplituden-Frequenz und Phasenmodulation untersucht. Am Schluß des Buches findet sich ein Abschnitt über die Stabilität von Stromkreisen und Reglern. Die Ausführungen darüber sind in Anbetracht der Bedeutung des Problemes sehr kurz gehalten. Es finden sich darin aber die wesentlichen Gedankengänge.

Das vorliegende Werk, welches sich vor allem durch seine übersichtliche und souveräne Behandlung der Zusammenhänge zwischen Einschwingvorgängen und den stationären Übertragungsgrößen, wie Amplitudenverlauf und Phasenverlauf auszeichnet, ist somit jedem bestens zu empfehlen, der sich mit den heute so wichtigen Zusammenhängen der Nachrichtentechnik beschäftigt und ohne große mathematische Vorkenntnisse in das erwähnte Gebiet eindringen will. Auf diesem Gebiet, welches erst in den letzten Jahren ein besonders großes Interesse findet, bildet das vorliegende Werk wohl die erste zusammenfassende Veröffentlichung in deutscher Sprache. Wertvoll sind ebenfalls die am Schluß des Buches angegebenen Literaturstellen, welche vor allem die deutsche Literatur berücksichtigen.

H. Thiemann

Ballistische Störungstheorie unter besonderer Berücksichtigung der Witterungseinflüsse. Von R. SÄNGER (Verlag Birkhäuser, Basel 1949). 226 Seiten, 49 Abb.; sFr. 14.50.

In fremden Staaten, so besonders in Frankreich und in Rußland, gehört die intensive Beschäftigung mit den mathematischen Grundlagen des Schießens seit jeher zu den besten Überlieferungen der Artillerieoffiziere. Im Gegensatz dazu bringen es unsere Verhältnisse mit sich, daß sich die Ausbildung der Offiziere meist auf das unerlässliche Mindestmaß von praktischen Kenntnissen beschränken muß und daß die hohe Mathematik im Unterricht nicht Platz findet. Dieser Zustand ist bedauerlich, denn der Beweis ist längst geleistet, daß solide theoretische Kenntnisse schließlich auch in der Praxis zu beträchtlichen Leistungssteigerungen führen.

Offiziere, die versuchen, durch Selbststudium ihre theoretischen ballistischen Kenntnisse zu erhöhen, haben es bei der Auswahl geeigneter Literatur nicht leicht. Für diejenigen, welche von der Hochschule her über ein gutes mathematisches Rüstzeug verfügen, bildet das Buch des Chefs des Artillerie-Wetterdienstes, Oberstlt. R. SÄNGER, Professor an der ETH., ein vorzügliches Mittel der Weiterbildung.

Die für den Laien möglicherweise etwas kompliziert erscheinenden Ableitungen bilden ein gutes Beispiel für die Anwendung mathematischer Theorien auf einem wichtigen Gebiet der Praxis.

Seit jeher verlangt die Artillerie ein Verfahren, welches erlaubt, Wirkungsschießen ohne Einschießen oder mit äußerster Abkürzung des Einschießens durchzuführen, doch scheiterte früher dieses Bestreben an den Mängeln der Vermessung und der Verfahren für die Ermittlung der meteorologischen Zustände. Heute stehen dank der Verbesserungen auf dem Gebiete der Optik und der Hochfrequenz diese unentbehrlichen Grundlagen meist zur Verfügung. Der Verfasser hat sich nun die Aufgabe gestellt, die Auswirkungen der momentanen meteorologischen Zustände auf die Normalverhältnisse, für welche die Flugbahnen berechnet sind, exakt zu analysieren und hat diese Aufgabe mit Erfolg gelöst. SÄNGER hat hier Pionierarbeit geleistet und sich mit seinen theoretischen Untersuchungen große Verdienste erworben.

Das Buch, welches neben der mathematischen Theorie auch die praktische Auswertung der Resultate anschaulich zur Darstellung bringt, sei bestens empfohlen.

R. von Wattenwyl

Neuerscheinungen 1949

Bergmann, Prof. Dr. Ludwig, *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*, 5. Auflage, 800 Seiten mit 475 Abbildungen und 83 Tafeln, Dezember 1949, Ganzleinen Fr. 50.—

Koppe, Dr. Heinz, *Grundlagen der statistischen Mechanik*, 97 Seiten, 1949, kartoniert Fr. 3.85

Bavink, Prof. Bernhard, *Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften*, 9. umgearbeitete Auflage, 803 Seiten und 91 Abbildungen, Oktober 1949, Ganzleinen Fr. 36.—

Falkenhagen, Prof. Dr. Hans, *Grundlagen der theoretischen Physik*, Band: Optik, 188 Seiten mit 43 Abb. Dezember 1949, Ganzleinen Fr. 13.—

Berg, Prof. Dr. Hellmut, *Einführung in die Physik der festen Erde*, 296 Seiten mit 107 Abbildungen, Dezember 1949, Ganzleinen Fr. 16.—

Küpfmüller, Prof. Dr. Karl, *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung*, 386 Seiten mit 474 Abbildungen, 1949, Ganzleinen Fr. 32.—

Feldtkeller, Prof. Dr. Richard, *Einführung in die Theorie der Spulen und Übertrager mit Eisenblechkernen*, 341 Seiten mit 270 Abbildungen, 2. Auflage, Oktober 1949, Ganzleinen Fr. 23.—

Feldtkeller, Prof. Dr. Richard, *Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik*, 3. Auflage, 164 Seiten mit 121 Abbildungen, Dezember 1949, kartoniert Fr. 10.50

S. H I R Z E L V E R L A G Z Ü R I C H



Universal Kathodenstrahl- oszillograph

Besonders geeignet für Stoßprüf anlagen und Untersuchungen von Abschaltvorgängen usw.

Einge baute Hochspannungsanlage für 15, 25, 35 und 45 kV. Einge baute Null-Linienverschiebung.

Empfindlichkeit in V/mm:

für die Zeitachse: $0,55 \times$ Anodenspannung in kV;
für die Meßspannung: $0,44 \times$ Anodenspannung in kV.

Strichscharfe: 0,03–0,3 mm, log. Zeitablenkung $1\mu s$ – $1000\mu s$
lin. Zeitablenkung $1000\mu s$ –1 s, einmalig und wiederholt.

Einschwingzeit: $0,2\mu s$; Registrierformat 6×6 cm;

Registriervermögen: 10–15 Perioden pro mm.

Schreibgeschwindigkeit 5000 km/s.

Trüb, Täuber & Co. AG.

Fabrik elektr. Meßinstrumente und wissenschaftlicher Apparate

Z U R I C H

Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

Mathematik

- FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes . . geb. Fr. 22.50
HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände geb. je Fr. 44.—
LINDER, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure geb. Fr. 18.50
LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendung geb. Fr. 48.—
OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band I geb. Fr. 47.50
SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I geb. Fr. 54.—
STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie geb. Fr. 28.50
ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik geb. Fr. 27.—
VOELKER, D. und DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Demnächst
CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie. In Vorbereitung
CARATHÉODORY, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung. In Vorbereitung
DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation. Demnächst

Physik und Astronomie

- GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik geb. Fr. 29.50
NIETHAMMER, Th.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung geb. Fr. 32.—
VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen geb. Fr. 36.—
WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik geb. Fr. 47.50
Kongressbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik und theoretische Physik, Basel 1949. Demnächst

Ingenieurwissenschaften

- BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert Fr. 24.50
JAEGER, Ch.: Technische Hydraulik geb. Fr. 48.50
KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge der Theorie der Wechselströme und des einphasigen Transformators geb. Fr. 26.50
Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen. In Vorbereitung
MEISSNER, E. und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper geb. Fr. 36.—
Band II: Dynamik der starren Körper geb. Fr. 32.50
SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie geb. Fr. 14.50
STÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I geb. Fr. 38.50
RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik geb. Fr. 29.—

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFTEN
aus dem Verlag Birkhäuser, Basel

Helvetica Physica Acta

Edita a Societate Physica Helvetica

Redaktionskomitee: P. HUBER, Basel – J. ROSSEL, Neuchâtel – A. MERCIER, Bern – A. PERRIER, Lausanne – P. SCHERRER, Zürich – J. WEIGLE, Genève.
Redaktion: M. FIERZ, Universität Basel

Abonnementspreis pro Jahr für Mitglieder der Schweizerischen physikalischen Gesellschaft: Inland Fr. 22.–, Ausland Fr. 28.–; für Nichtmitglieder: Inland Fr. 32.–, Ausland Fr. 38.–; Einzelnnummer für Mitglieder Fr. 4.50; für Nichtmitglieder Fr. 7.–. Jährlich 6–8 Hefte von zusammen 500–600 Seiten

Elemente der Mathematik

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Patronat: G. DUMAS, Lausanne – H. FEHR, Genf – R. FUETER, Zürich –
H. JECKLIN, Zürich

Redaktion: L. LOCHER-ERNST – E. VOELLMY – E. TROST

Abonnementspreis: jährlich Fr. 7.–, Ausland Fr. 10.–; Einzelnnummer
Fr. 1.80. Erscheint alle 2 Monate

Experientia

Revue mensuelle des Sciences pures et appliquées

Monatsschrift für das gesamte Gebiet der Naturwissenschaft

Rivista mensile di Scienze pure e applicate

Monthly Journal of Pure and Applied Science

Editores: A. VON MURALT, Bern – L. Ruzicka, Zürich – J. WEIGLE, Genève

Redactor: H. MISLIN, Basel

Jährlich Fr. 24.–, Ausland Fr. 28.–, Einzelnnummer Fr. 2.50

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

Im Rahmen der *Beihefte zur Zeitschrift
«Elemente der Mathematik»* erscheint
eine Reihe kurzer

Mathematiker- Biographien

Neben den wichtigsten Daten, einer Charakteristik der Persönlichkeit und der Würdigung des Werkes an Beispielen enthält jedes Heft mehrere Illustrationen.

Bis jetzt sind erschienen:

JAKOB STEINER, par Dr L. Kollros, Professeur à l'E.P.F. (en langue française). Avec deux portraits et un fac-similé.

LEONHARD EULER, von Dr. R. Fueter, Professor an der Universität Zürich. Zwei Porträts und ein Faksimile.

LUDWIG SCHLÄFLI, von Dr. J. J. Burckhardt, Professor an der Universität Zürich. 2 Porträts, 2 Strichzeichnungen und 1 Faksimile.

JOST BÜRGI UND DIE LOGARITHMEN, von Dr. E. Voellmy, Basel. Ein Porträt und zwei Wiedergaben der ersten Logarithmentafeln aus dem Jahre 1620.

JOHANN UND JAKOB BERNOULLI, von Dr. J.O. Fleckenstein, Privatdozent an der Universität Basel. Zwei Porträts, zwei Faksimiles und vier Strichzeichnungen.

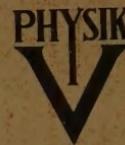
EVARISTE GALOIS, par Dr L. Kollros, Professeur à l'E.P.F. (en langue française). Avec un portrait et un fac-similé.

N. H. ABEL, von Dr. Oystein Ore, Prof. an der Yale University, New Haven. In Vorbereitung

Jedes Heft hat einen Umfang von 24 Seiten und kostet Fr. 3.50.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL
(Schweiz)



Ziel des Physik Verlages ist es, die Kenntnis von den Problemen und Ergebnissen der physikalischen Wissenschaften zu verbreiten und sichtbar zu machen, welche Stellung die Physik in der Geschichte des menschlichen Geistes einnimmt und welche Bedeutung ihr für die akuten Probleme unserer Generation zukommt.

*

PHYSIKALISCHE BLÄTTER

Monatsschrift für Grundfragen und Randprobleme der Physik. Jahres-
bezugspreis DM 24.- (\$ 5.75).

PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN

Eine Schriftenreihe abgeschlossener Einzelprobleme. Heft 1, W. KOSSEL.
Zur Darstellung der Elektrizitäts-
lehre.

*

PHYSIK VERLAG
Mosbach/Baden, Deutschland

Meßgeräte für Fernmeldetechnik und angewandte Physik

Tracerlab

Strahlungsmeßgeräte aller Art.

General Radio

Fernmeldetechnik, Geräusch und
Erschütterung, Stroboskope.

Marconi

Fernmeldetechnik, Leitfähigkeit, pH.

Du Mont

Kathodenstrahlröhren und Oszillogra-
phen für Gleichstrom-, NF-, HF- und
Impulsmessungen.



GENERALVERTRETUNG:

SEYFFER & CO. AG. ZÜRICH 26

Kanzleistraße 126 Telephon (081) 28 69 86

